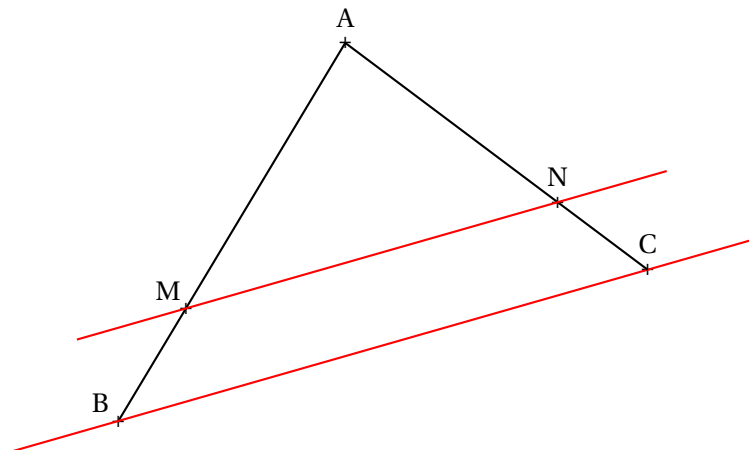


I — Le théorème de Thalès – Version triangle

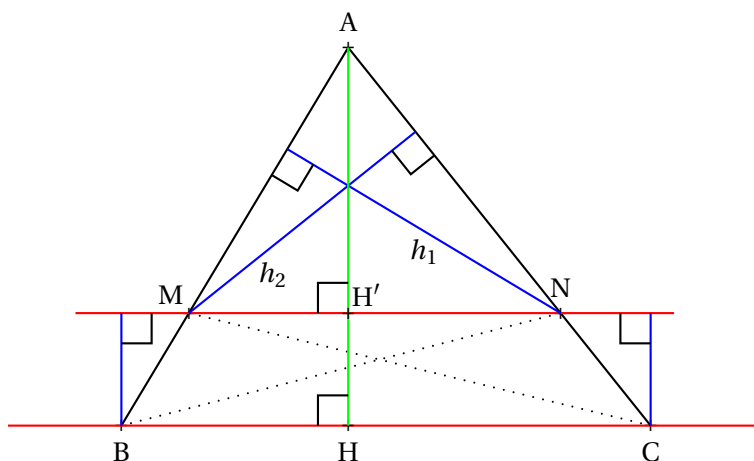
THÉORÈME 3.1 : Théorème de Thalès



Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe [AB] en M et [AC] en N alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

DÉMONSTRATION :



En observant les triangles MNB et MNC on constate qu'ils ont une base commune, le segment [MN]. Par rapport à cette base ils ont la même hauteur puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On en déduit qu'ils ont la même aire.

$$\mathcal{A}(\text{MNB}) = \mathcal{A}(\text{MNC})$$

$$\mathcal{A}(\text{AMN}) = AM \times h_1 \text{ et } \mathcal{A}(\text{ABN}) = AB \times h_1 \text{ ainsi } \frac{\mathcal{A}(\text{AMN})}{\mathcal{A}(\text{ABN})} = \frac{AM}{AB}$$

$$\mathcal{A}(\text{AMN}) = AN \times h_2 \text{ et } \mathcal{A}(\text{ACM}) = AC \times h_2 \text{ ainsi } \frac{\mathcal{A}(\text{AMN})}{\mathcal{A}(\text{ACM})} = \frac{AN}{AC}$$

On constate que $\mathcal{A}(\text{ABN}) = \mathcal{A}(\text{AMN}) + \mathcal{A}(\text{MNB})$ et que $\mathcal{A}(\text{ACM}) = \mathcal{A}(\text{AMN}) + \mathcal{A}(\text{MNC})$
Comme $\mathcal{A}(\text{MNB}) = \mathcal{A}(\text{MNC})$ on prouve ainsi que $\mathcal{A}(\text{ABN}) = \mathcal{A}(\text{ACM})$

Finalemment $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Reste à démontrer l'égalité avec le troisième quotient $\frac{MN}{BC}$.

Considérons la hauteur [AH] du triangle ABC.

On peut reprendre le raisonnement précédent dans le triangle ABH, on obtient $\frac{AM}{AB} = \frac{AH'}{AH}$

De même dans le triangle AHC, on obtient $\frac{AN}{AC} = \frac{AH'}{AH}$.

Comme précédemment, les triangles NH'C et NH'H ont la même base et la même hauteur donc $\mathcal{A}(\text{NH}'C) = \mathcal{A}(\text{NH}'H)$

Ainsi $\mathcal{A}(\text{NH}'C) = \mathcal{A}(\text{NH}'H)$ c'est-à-dire $\frac{AH' \times HC}{2} = \frac{AH' \times H'N}{2}$.

On prouve ainsi que $AH' \times HC = AH' \times H'N$ et d'après l'égalité des produits en croix $\frac{AH'}{AH} = \frac{H'N}{HC}$

On prouve de même que $\frac{AH'}{AH} = \frac{H'M}{HB}$.

Nous avons donc $\frac{H'M}{HB} = \frac{H'N}{HC}$ or on sait que $H'M + H'N = MN$ et que $HB + HC = BC$

Comme $\frac{H'M}{HB} = \frac{H'N}{HC}$ on a :

$$H'M \times HC = H'N \times HB$$

Ajoutons $H'N \times HC$ à chaque membre de l'égalité :

$$H'M \times HC + H'N \times HC = H'N \times HB + H'N \times HC$$

$$(H'M + H'N) \times HC = H'N \times (HB + HC)$$

$$MN \times HC = H'N \times BC$$

En utilisant à nouveau l'égalité des produits en croix on arrive à : $\frac{MN}{BC} = \frac{H'N}{HC}$.

Il suffit de regrouper les quotients égaux : $\frac{H'M}{HB} = \frac{H'N}{HC} = \frac{AH'}{AH} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$

CQFD
