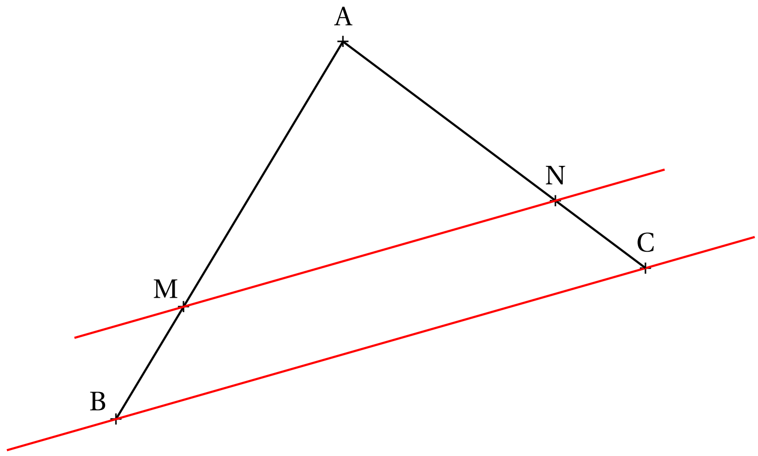
I — Le théorème de Thalès – Version triangle

Théorème 3.1 : Théorème de Thalès

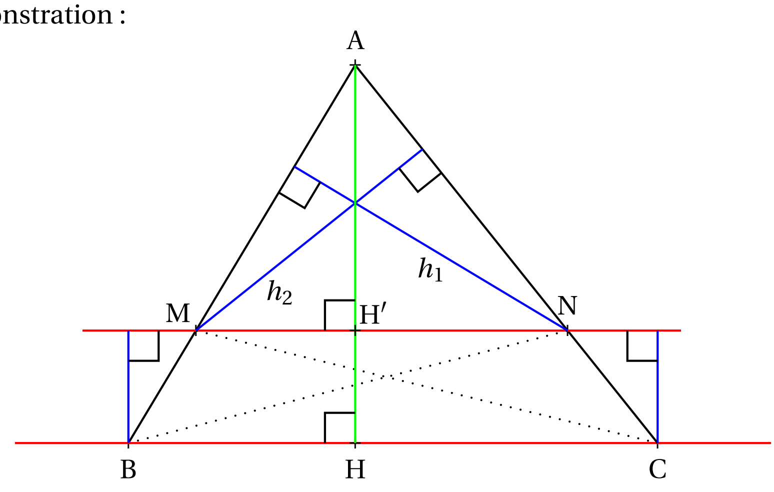


Si dans un triangle ABC une droite parallèle à (BC) coupe [AB] en M et [AC] en N
alors les mesures des triangles ABC et AMN sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$

Démonstration :

Voici un première démonstration :



En observant les triangles MNB et MNC on constate qu'ils ont une base commune, le segment [MN]. Par rapport à cette base ils ont la même hauteur puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On en déduit qu'ils ont la même aire.
$\mathit{Aire}(\mathrm{MNB}) = \mathit{Aire}(\mathrm{MNC})$

$\mathit{Aire}(\mathrm{AMN}) = \mathrm{AM} \times h_1$ et $\mathit{Aire}(\mathrm{ABN}) = \mathrm{AB} \times h_1$ ainsi $\dfrac{\mathit{Aire}(\mathrm{AMN})}{\mathit{Aire}(\mathrm{ABN})} = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$

$\mathit{Aire}(\mathrm{AMN}) = \mathrm{AN} \times h_2$ et $\mathit{Aire}(\mathrm{ACM}) = \mathrm{AC} \times h_2$ ainsi $\dfrac{\mathit{Aire}(\mathrm{AMN})}{\mathit{Aire}(\mathrm{ACM})} = \dfrac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$

On constate que $\mathit{Aire}(\mathrm{ABN}) = \mathit{Aire}(\mathrm{AMN}) + \mathit{Aire}(\mathrm{MNB})$ et que $\mathit{Aire}(\mathrm{ACM}) = \mathit{Aire}(\mathrm{AMN}) + \mathscr{A}\rangle\nabla\rceil(\mathrm{MNC})$

Comme *Aire*(MNB) = *Aire*(MNC) on prouve ainsi que *Aire*(ABN) = *Aire*(ACM)

Finalement $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

Reste à démontrer l'égalité avec le troisième quotient $\dfrac{MN}{BC}$.

Considérons la hauteur [AH] du triangle ABC.
On peut reprendre le raisonnement précédent dans le triangle ABH, on obtient $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AH'}{AH}$
De même dans le triangle AHC, on obtient $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AH'}{AH}$.

Comme précédemment, les triangles NH′C et NH′H ont la même base et la même hauteur donc *Aire*(NH′C) = *Aire*(NH′H)
Ainsi *Aire*(AH′C) = *Aire*(AHN) c'est-à-dire $\dfrac{AH' \times HC}{2} = \dfrac{AH \times H'N}{2}$.

On prouve ainsi que $AH' \times HC = AH \times H'N$ et d'après l'égalité des produits en croix $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'N}{HC}$

On prouve de même que $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{H'M}{HB}$.

Nous avons donc $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ or on sait que $H'M + H'N = MN$ et que $HB + HC = BC$

Comme $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC}$ on a :

$$H'M \times HC = H'N \times HB$$

Ajoutons $H'N \times HC$ à chaque membre de l'égalité :

$$H'M \times HC + H'N \times HC = H'N \times HB + H'N \times HC$$
$$(H'M + H'N) \times HC = H'N \times (HB + HC)$$
$$MN \times HC = H'N \times BC$$

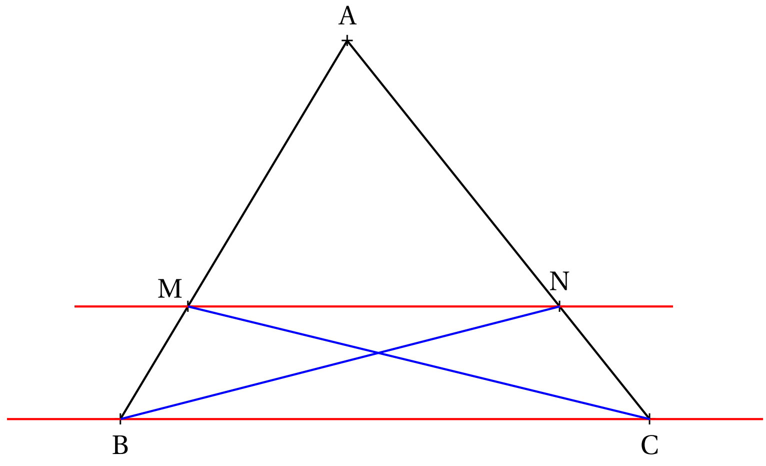
En utilisant à nouveau l'égalité des produits en croix on arrive à : $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{H'N}{HC}$.

Il suffit de regrouper les quotients égaux : $\dfrac{H'M}{HB} = \dfrac{H'N}{HC} = \dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$

CQFD

DÉMONSTRATION :

Une deuxième version qui utilise les céviennes comme dans les exercices 3.1 à 3.7 :



Dans le triangle ABC, [MC] est une cévienne.
Les triangles ABC et AMC ont la même hauteur dont on peut noter h la mesure.

Ainsi $Aire(\text{AMC}) = \dfrac{1}{2} \times \text{AM} \times h$ et $Aire(\text{ABC}) = \dfrac{1}{2} \times \text{AB} \times h$.

On en déduit que $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})} = \dfrac{\dfrac{1}{2} \times \text{AM} \times h}{\dfrac{1}{2} \times \text{AB} \times h} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AB}}$

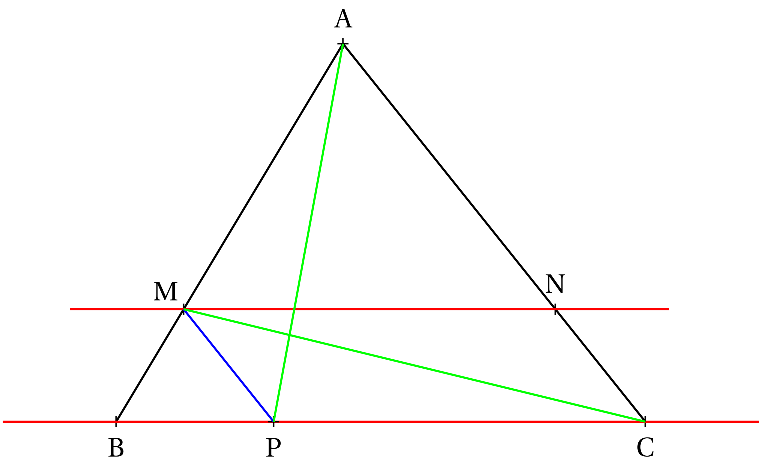
De même dans le triangle ABC, [NB] est une cévienne.

On en déduit que $\dfrac{Aire(\text{ANB})}{Aire(\text{ABC})} = \dfrac{\text{AN}}{\text{AC}}$

On constate aussi que $Aire(\text{AMC}) = Aire(\text{AMN}) + Aire(\text{MNB})$ et que $Aire(\text{ANB}) = Aire(\text{AMN}) + Aire(\text{MNC})$.

Comme les droites (MN) et (BC) sont parallllèles, les triangles MNB et MNC ont la même hauteur et la même base. Leurs aires sont donc égales.

On en déduit que $Aire(\text{AMC}) = Aire(\text{ANB})$ et finalement que $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AN}}{\text{AC}}$.



On trace la parallèle à (AC) passant par M, elle coupe [BC] en P.

Les triangles AMC et APC ont la même base et la même hauteur puisque les droites (AC) et (MP) sont parallèles. Ces deux triangles ont donc la même aire.

Dans le triangle ABC, [MC] est une cévienne. On a donc $\dfrac{Aire(\text{AMC})}{Aire(\text{ABC})} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AB}}$.

Dans le triangle ABC, [PA] est une cévienne. On a donc $\dfrac{Aire(\text{APC})}{Aire(\text{ABC})} = \dfrac{\text{PC}}{\text{BC}}$.

Le quadrilatère MNPC a ses côtés parallèles deux à deux, il s'agit donc d'un parallèlogramme.
Ainsi MN = PC.

On arrive ainsi à $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{PC}}{\text{BC}} = \dfrac{\text{MN}}{\text{PC}}$.

Finalement, $\dfrac{\text{AM}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{AN}}{\text{AC}} = \dfrac{\text{MN}}{\text{BC}}$.

CQFD