Chapitre V

Calcul littéral

Tous le reste

Plan du cours :

a

Programme (*BO n° 30 du 26-7-2018*) **:**

— a

Compétences :

— a

SITUATION INITIALE : **Tour de magie et programme de calcul**

Voici un programme de calcul :

> — Choisir un nombre;
> — le multiplier par 7;
> — enlever 4;
> — multiplier le tout par 11;
> — ajouter 50;
> — multiplier le tour par 13;
> — enlever 78.

1. Tester ce programme de calcul avec trois nombres entiers positifs inférieurs à 100 de votre choix.

2. Que constatez-vous? Quelle conjecture pouvez-vous faire?

3. On note x le nombre entier de départ inférieur à 100 et on note $f(x)$ le résultat obtenu à la fin du programme. Quelle est l'expression de f en fonction de x.

4. Développer et réduire $f(x)$ et expliquer la conjecture de la question **2.**

Voici le programme Scratch qui correspond à ce programme de calcul :

5. Compléter les parties manquantes de ce programme.

I — La distributivité

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition. Cela signifie que le produit d'une somme est égal à la somme des produits.
Plus généralement :

❧ DÉFINITION 5.1 : Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

a, b et k des nombres quelconques.

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

VOCABULAIRE :

- **Développer** une expression revient à écrire un produit de plusieurs facteurs sous forme d'une somme de termes.
- **Factoriser** une expression revient à écrire une somme de termes sous forme d'un produit de plusieurs facteurs.

EXEMPLES :
La distributivité est utilisé pour faciliter le calcul mental.
$78 \times 99 = 78 \times (100-1) = 78 \times 100 - 78 \times 1 = 7\,800 - 78 = 7\,722$

II — Développer et réduire un expression littérale

III — Factoriser avec un facteur commun

IV — Initiation au calcul littéral

V — Résoudre une équation produit

Exercices

Exercice n° 5.1 : Un exercice

Factoriser pour résoudre

1. On pense à deux nombres quelconques A et B. On sait que $A \times B = 0$. Que peut-on dire de A et B ?

2. On pose $f(x) = (2x-8)(3x+4)$.

2.a. Développer et réduire $f(x)$.

2.b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3.a. On pose $g(x) = (3x+4)(4x-1) + (3x+4)(7-2x)$. Développer et réduire $g(x)$.

3.b. Factoriser $g(x)$.

3.c. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

4.a. On pose $h(x) = (5x-1)(3x+3) - (5x-1)(6x+3)$. Développer et réduire $h(x)$.

4.b. Factoriser $h(x)$.

4.c. Quels sont les antécédents de 0 par h.

5.a On pose $k(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(5x-3)$. Développer et réduire $k(x)$.

5.b. Factoriser $k(x)$.

5.c. Résoudre $k(x) = 0$.

6. On pose $l(x) = (3x+7)(3x-7)$

6.a. Développer et réduire $l(x)$

6.b. On pose $m(x) = 16x^2 - 36$. Factoriser $m(x)$.

6.c. On pose $p(x) = 25x^2 - 16$. Factoriser $p(x)$.

7. On pose $q(x) = (5x-7)^2 - 25$

7.a. Factoriser $q(x)$.

7.b. Résoudre $q(x) = 0$.

8. On pose $r(x) = (3x+1)^2 - (2x-3)^2$

8.a. Développer et réduire $r(x)$.

8.b. Factoriser $r(x)$.

8.c. Résoudre $r(x) = 0$.

9. On pose $s(x) = (4x-1)^2 - (4x-1)(3x+1)$, $t(x) = (6x-1)(3x+5) - (6x-1)(5x-2)$ et $v(x) = (6x-7)^2 - (2x+3)^2$.

9.a. Développer et réduire $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

9.b. Factoriser $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

9.c. Résoudre $s(x) = 0$, $t(x) = 0$ et $v(x) = 0$.

Factoriser pour résoudre — Correction

1. On pense à deux nombres quelconques A et B. On sait que A × B = 0. Que peut-on dire de A et B ?

Pour que le produit soit égal à 0, il faut que l'un des deux nombres soit égal à 0.

Un produit de deux facteurs est égal à 0 si et seulement si un des deux facteurs est égal à 0.

2. On pose $f(x) = (2x-8)(3x+4)$.

2.a. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = 6x^2 + 8x - 24x - 32$

$\boxed{6x^2 - 16x - 32}$

2.b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

On peut tenter d'utiliser la forme développée.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 6x^2 - 16x - 32 &= 0 \\ 6x^2 - 16x &= 32 \\ x(6x-16) &= 32 \end{aligned}$$

C'est une impasse ! Utilisons la forme factorisée.

$$(2x-8)(3x+4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= 0 \\ 2x - 8 {\color{red}+8} &= 0 {\color{red}+8} \\ &2x8 \\ &x\frac{8}{2} \\ &x4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 0 \\ 3x + 4 {\color{red}-4} &= 0 {\color{red}-4} \\ 3x &= -4 \\ x &= \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 4 \text{ et } x = \frac{-4}{3}}$

3.a. On pose $g(x) = (3x+4)(4x-1) + (3x+4)(7-2x)$. Développer et réduire $g(x)$.

$g(x) = \left(12x^2 - 3x + 16x - 4\right) + \left(21x - 6x^2 + 28 - 8x\right)$

$\boxed{g(x) = 6x^2 + 26x + 22}$

3.b. Factoriser $g(x)$.

$g(x) = (3x+4)(4x-1) + (3x+4)(7-2x)$
$g(x) = (3x+4)\,[(4x-1)+(7x-2x)]$
$g(x) = (3x+4)(3x-1+7x-2)$

$\boxed{g(x) = (3x+4)(10x-3)}$

3.c. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

$$(3x+4)(10x-3) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x+4 &= 0 \\ 3x+4-4 &= 0-4 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10x-3 &= 0 \\ 10x-3+3 &= 0+3 \\ 10x &= 3 \\ x &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = -\frac{4}{3} \text{ et } x = \frac{3}{10}}$

4.a. On pose $h(x) = (5x-1)(3x+3) - (5x-1)(6x+3)$. Développer et réduire $h(x)$.

$h(x) = (5x-1)(3x+3) - (5x-1)(6x+3)$
$h(x) = \left(15x^2+15x-3x-3\right) - \left(30x^2+15x-6x-3\right)$
$h(x) = 15x^2+15x-3x-3-30x^2-15x+6x+3$

$\boxed{h(x) = -15x^2+3x}$

4.b. Factoriser $h(x)$.

$h(x) = (5x-1)(3x+3) - (5x-1)(6x+3)$
$h(x) = (5x-1)\,((3x+3)-(6x+3))$
$h(x) = (5x-1)(3x+3-6x-3)$
$h(x) = (5x-1)(-3x)$

$\boxed{h(x) = -3x(5x-1)}$

4.c. Quels sont les antécédents de 0 par h.

Il faut résoudre l'équation $h(x) = 0$.

$$-3x(5x-1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} -3x &= 0 \\ x &= \frac{0}{-3} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x-1 &= 0 \\ 5x-1+1 &= 0+1 \\ 5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0 \text{ et } x = \frac{1}{5}}$$

5.a On pose $k(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(5x-3)$. Développer et réduire $k(x)$.

$k(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = (3x-5)(3x-5) - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = \left(9x^2 - 15x - 15x + 25\right) - \left(15x^2 - 9x - 25x + 15\right)$
$k(x) = 9x^2 - 15x - 15x + 25 - 15x^2 + 9x + 25x - 15$

$$\boxed{k(x) = -6x^2 + 4x + 10}$$

5.b. Factoriser $k(x)$.

$k(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = (3x-5)(3x-5) - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = (3x-5)\left((3x-5) - (5x-3)\right)$
$k(x) = (3x-5)(3x-5-5x+3)$

$$\boxed{k(x) = (3x-5)(-2x-2)}$$

5.c. Résoudre $k(x) = 0$.

$$(3x-5)(-2x-2) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x-5 &= 0 \\ 3x-5+5 &= 0+5 \\ 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x-2 &= 0 \\ -2x-2+2 &= 0+2 \\ -2x &= 2 \\ x &= \frac{2}{-2} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = \frac{5}{3} \text{ et } x = -1}$$

6. On pose $l(x) = (3x+7)(3x-7)$

6.a. Développer et réduire $l(x)$

$l(x) = (3x+7)(3x-7)$
$l(x) = 9x^2 - 21x + 21x - 49$

$$\boxed{l(x) = 9x^2 - 49}$$

a et b des nombres quelconques.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

6.b. On pose $m(x) = 16x^2 - 36$. Factoriser $m(x)$.

$m(x) = 16x^2 - 36$
$m(x) = (4x)^2 - 6^2$

$\boxed{m(x) = (4x+6)(4x-6)}$

6.c. On pose $p(x) = 25x^2 - 16$. Factoriser $p(x)$.

7. On pose $q(x) = (5x-7)^2 - 25$

7.a. Factoriser $q(x)$.

$q(x) = (5x-7)^2 - 25$
$q(x) = (5x-7)^2 - 5^2$
$q(x) = ((5x-7)+5)\,((5x-7)-5)$
$q(x) = (5x-7+5)(5x-7-5)$

$\boxed{q(x) = (5x-2)(5x-12)}$

7.b. Résoudre $q(x) = 0$.

$$(5x-2)(5x-12) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 5x-2 &= 0 \\ 5x-2+2 &= 0+2 \\ 5x &= 2 \\ x &= \frac{2}{5} \\ x &= 0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x-12 &= 0 \\ 5x-12+12 &= 0+12 \\ 5x &= 12 \\ x &= \frac{12}{5} \\ x &= 2,4 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0,4 \text{ et } x = 2,4}$

8. On pose $r(x) = (3x+1)^2 - (2x-3)^2$

8.a. Développer et réduire $r(x)$.

$r(x) = (3x+1)^2 - (2x-3)^2$
$r(x) = (3x+1)(3x+1) - (2x-3)(2x-3)$
$r(x) = \left(9x^2 + 3x + 3x + 1\right) - \left(4x^2 - 6x - 6x + 9\right)$
$r(x) = 9x^2 + 3x + 3x + 1 - 4x^2 + 6x + 6x - 9$

$\boxed{r(x) = 5x^2 + 18x - 8}$

8.b. Factoriser $r(x)$.

$r(x) = (3x+1)^2 - (2x-3)^2$

On reconnaît une expression de la forme $A^2 - B^2$ *avec* $A = (3x+1)$ *et* $B = (2x-3)$

$r(x) = [(3x+1) + (2x-3)]\,[(3x+1) - (2x-3)]$
$r(x) = (3x+1+2x-3)(3x+1-2x+3)$

$\boxed{r(x) = (5x-2)(x+4)}$

8.c. Résoudre $r(x) = 0$.

$$(5x-2)(x+4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=0+2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}$$
$$x=0,4$$

$$x+4=0$$
$$x+4-4=0-4$$
$$x=-4$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x=0,4 \text{ et } x=-4}$

9. On pose $s(x)=(4x-1)^2-(4x-1)(3x+1)$, $t(x)=(6x-1)(3x+5)-(6x-1)(5x-2)$ et $v(x)=(6x-7)^2-(2x+3)^2$.

9.a. Développer et réduire $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

$s(x)=(4x-1)^2-(4x-1)(3x+1)$
$s(x)=(4x-1)(4x-1)-(4x-1)(3x+1)$
$s(x)=\left(16x^2-4x-4x+1\right)-\left(12x^2+4x-3x-1\right)$
$s(x)=16x^2-4x-4x+1-12x^2-4x+3x+1$

$\boxed{s(x)=4x^2-9x+2}$

$t(x)=(6x-1)(3x+5)-(6x-1)(5x-2)$
$t(x)=\left(18x^2+30x-3x-5\right)-\left(30x^2-12x-5x+2\right)$
$t(x)=18x^2+30x-3x-5-30x^2+12x+5x-2$

$\boxed{t(x)=-12x^2+44x-7}$

$v(x)=(6x-7)^2-(2x+3)^2$
$v(x)=(6x-7)(6x-7)-(2x+3)(2x+3)$
$v(x)=\left(36x^2-42x-42x+49\right)-\left(4x^2+6x+6x+9\right)$
$v(x)=36x^2-42x-42x+49-4x^2-6x-6x-9$

$\boxed{v(x)=32x^2-96x+40}$

9.b. Factoriser $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

$s(x)=(4x-1)^2-(4x-1)(3x+1)$
$s(x)=(4x-1)(4x-1)-(4x-1)(3x+1)$
$s(x)=(4x-1)\,[(4x-1)-(3x+1)]$
$s(x)=(4x-1)(4x-1-3x-1)$

$\boxed{s(x)=(4x-1)(x-2)}$

$t(x)=(6x-1)(3x+5)-(6x-1)(5x-2)$
$t(x)=(6x-1)\,[(3x+5)-(5x-2)]$
$t(x)=(6x-1)(3x+5-5x+2)$

$\boxed{t(x)=(6x-1)(-2x+7)}$

$v(x)=(6x-7)^2-(2x+3)^2$
$v(x)=[(6x-7)+(2x+3)]\,[(6x-7)-(2x+3)]$
$v(x)=(6x-7+2x+3)(6x-7-2x-3)$

$\boxed{v(x)=(8x-4)(4x-10)}$

9.c. Résoudre $s(x)=0$, $t(x)=0$ et $v(x)=0$.

$$s(x)=0$$

$$(4x-1)(x-2)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned}4x-1&=0\\4x-1+1&=0+1\\4x&=1\\x&=\frac{1}{4}\\x&=0,25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x-2&=0\\x-2+2&=0+2\\x&=2\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x=0,25 \text{ et } x=2}$

$$t(x)=0$$

$$(6x-1)(-2x+7)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned}6x-1&=0\\6x-1+1&=0+1\\6x&=1\\x&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2x+7&=0\\-2x+7-7&=0-7\\-2x&=-7\\x&=\frac{-7}{2}\\x&=-3,5\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x=\frac{1}{6} \text{ et } x=-3,5}$

$$v(x)=0$$

$$(8x-4)(4x-10)=0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned}8x-4&=0\\8x-4+4&=0+4\\8x&=4\\x&=\frac{4}{8}\\x&=\frac{1}{2}\\x&=0,5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x-10&=0\\4x-10+10&=0+10\\4x&=10\\x&=\frac{10}{4}\\x&=\frac{5}{2}\\x&=2,5\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0,5 \text{ et } x = 2,5}$

Évaluation de mathématiques

Question de cours

Recopier sur votre copie les trois identités remarquables.

Exercice 1

Développer les expressions suivantes :

$A = (x+6)^2$

$B = (3x-7)^2$

$C = (4x-3)(4x+3)$

$D = (5x-3)^2$

$E = (6x+8)^2$

$F = (7x+8)(7x-8)$

$G = (5x+10)(5x-10)$

$H = (7x-9)^2$

$I = (4x+8)^2$

Exercice 2

On pose $f(x) = (5x-8)^2 - (5x-8)(7x+3)$.

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Factoriser $f(x)$.

3. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.

4. Résoudre l'équation $(5x-8)(-2x-11) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f.

Exercice 3

Voici un programme de calcul :

— Choisir un nombre ;
— Le multiplier par 9 ;
— Ajouter 30 ;
— Multiplier le tout par le nombre de départ ;
— Ajouter 25.

1. Montrer qu'en choisissant -2 pour nombre de départ on obtient 1 à la fin.

2. Utiliser ce programme de calcul en prenant 3 puis 5 comme nombre de départ.

On appelle g la fonction qui a un nombre de départ x donne le résultat final $g(x)$.

3. Donner l'expression de $g(x)$ et montrer en développant que $g(x) = 9x^2 + 30x + 25$.

4. Développer $(3x+5)^2$.

5. Expliquer pourquoi quand on choisit un nombre entier au départ le résultat est toujours le carré d'un nombre entier.

6. Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir 0 à la fin ?

Évaluation de mathématiques – Correction

Question de cours

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Exercice 1

Développer les expressions suivantes :

A = $(x+6)^2 = \boxed{x^2+12x+36}$ D = $(5x-3)^2 = \boxed{25x^2-30x+9}$ G = $(5x+10)(5x-10) = \boxed{25x^2-100}$

B = $(3x-7)^2 = \boxed{9x^2-42x+49}$ E = $(6x+8)^2 = \boxed{36x^2+96x+64}$ H = $(7x-9)^2 = \boxed{49x^2-126x+81}$

C = $(4x-3)(4x+3) = \boxed{16x^2-9}$ F = $(7x+8)(7x-8) = \boxed{49x^2-64}$ I = $(4x+8)^2 = \boxed{16x^2+64x+64}$

Exercice 2

1. $f(x) = (5x-8)^2-(5x-8)(7x+3)$.
$f(x) = 25x^2-80x+64-(35x^2+15x-56x-24)$
$f(x) = 25x^2-80x+64-35x^2-15x+56x+24$
$\boxed{f(x) = -10x^2-39x+88}$

2. $f(x) = (5x-8)^2-(5x-8)(7x+3)$
$f(x) = (5x-8)\,[(5x-8)-(7x+3)]$
$f(x) = (5x-8)(5x-8-7x-3)$
$\boxed{f(x) = (5x-8)(-2x-11)}$

3. $f(-1) = -10\times(-1)^2-39\times(-1)+88$ donc $f(-1) = -10+39+88 = \boxed{116}$
$f(2) = -10\times 2^2-39\times 2+88$ donc $f(2) = -10\times 4-78+88 = -40+10 = \boxed{-30}$

4. Résoudre l'équation $(5x-8)(-2x-11) = 0$

Un produit de facteurs est nul à la seule condition que l'un des facteurs soit nul.

$5x-8=0$ $\qquad$ $5x=8$

$5x-8+8=0+8$ $\qquad$ x

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f.

Exercice 3

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre;
- Le multiplier par 9;
- Ajouter 30;
- Multiplier le tout par le nombre de départ;
- Ajouter 25.

1. Montrer qu'en choisissant -2 pour nombre de départ on obtient 1 à la fin.

2. Utiliser ce programme de calcul en prenant 3 puis 5 comme nombre de départ.

On appelle g la fonction qui a un nombre de départ x donne le résultat final $g(x)$.

3. Donner l'expression de $g(x)$ et montrer en développant que $g(x) = 9x^2+30x+25$.

4. Développer $(3x+5)^2$.

5. Expliquer pourquoi quand on choisit un nombre entier au départ le résultat est toujours le carré d'un nombre entier.

6. Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir 0 à la fin?

Sur la route . . . du brevet

Livre 1

Arithmétique — Tableur — Calcul littéral — Vitesse — Tâche complexe

Problème n° 1 : Nouvelle-Calédonie — Décembre 2018

1. Décomposer les nombres 162 et 108 en produit de facteurs premiers.

2. Déterminer deux diviseurs communs aux nombres 162 et 108 plus grand que 10.

Un cuisinier vend des barquettes composées de nems et de samossas. Le cuisinier a préparé 162 nems et 108 samossas. Chaque barquette doit avoir une répartition identique de nems et de samossas. Tous les nems et tous les samossas doivent être utilisés.

3.a. Le cuisinier peut-il réaliser 36 barquettes ?

3.b. Quel nombre maximal de barquettes pourra-t-il réaliser ?

3.c. Dans ce cas, combien y aura-t-il de nems et de samossas dans chaque barquette ?

Problème n° 2 : Amérique du Sud — Novembre 2018

Voici deux programmes de calcul :

Programme de calcul n° 1

- Choisir un nombre ;
- Soustraire 5 ;
- Multiplier le tout par 4.

Programme de calcul n° 2

- Choisir un nombre ;
- Multiplier par 6 ;
- Soustraire 20 ;
- Soustraire le double du nombre de départ.

1.a. Quel résultat obtient-on quand on applique le **Programme n° 1** au nombre 3.
1.b. Quel résultat obtient-on quand on applique le **Programme n° 2** au nombre 3.

2. Démontrer qu'en choisissant -2, les deux programmes donnent le même résultat.

3. On décide de réaliser davantage d'essais. On utilise un tableur et on obtient les résultats suivants :

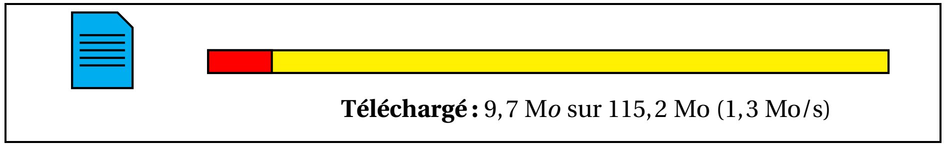
	A	B	C
1	Nombre choisi	Programme 1	Programme 2
2	0	-20	-20
3	1	-16	-16
4	2	-12	-12
5	3	-8	-8

Quelle formule a-t-on saisi dans la cellule B2 avant de la recopier vers le bas ?

4. Les résultats affichés dans les colonnes B et C sont égaux. Lucie pense que pour n'importe quel nombre choisi au départ, les deux programmes donnent toujours le même résultat.
Démontrer que Lucie a raison.

Problème n° 3 : Amérique du Nord — Juin 2018

On considère la fenêtre de téléchargement ci-dessous :



Si la vitesse de téléchargement reste constante, faudra-t-il plus d'une minute vingt-cinq secondes pour que le téléchargement se termine ?

Problème n° 4 : Polynésie — Juin 2016

M. Durand doit changer de voiture. Il choisit un modèle Prima qui existe en deux versions : essence ou diesel. Il dispose des informations suivantes :

Version essence

- Consommation moyenne : 6,2 L pour 100 km ;
- Type de moteur : essence ;
- Carburant : SP95 ;
- Prix d'achat : 21 550 €.

Version diesel

- Consommation moyenne : 5,2 L pour 100 km ;
- Type de moteur : diesel ;
- Carburant : gazole ;
- Prix d'achat : 23 950 €.

Estimation du prix des carburants par M. Durand

- Prix d'un litre de SP95 : 1,415 € ;
- Prix d'un litre de gazole : 1,224 €.

Durant les dernières années, M. Durand a parcouru en moyenne 22 300 km par an. Pour choisir entre les deux modèles, il décide de réaliser le tableau comparatif ci-dessous, établi pour 22 300 km parcourus en un an.

	Version essence	Version diesel
Consommation de carburant	1 383 L	
Budget de carburant	1 957 €	

1. Recopier et compléter le tableau en écrivant les calculs effectués.

2. M. Durand choisit finalement la version diesel. En considérant qu'il parcourt 22 300 km tous les ans et que le prix du carburant ne varie pas, dans combien d'années l'économie réalisée sur le carburant compensera-t-elle la différence de prix d'achat entre les deux versions ?

Problème n° 1 : Nouvelle-Calédonie — Décembre 2018

Correction

Arithmétique

1.

162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$\boxed{162 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^4}$

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$\boxed{108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3}$

2. *Il faut observer les deux décompositions et trouver des facteurs communs pour construire les diviseurs communs !*

$2 \times 3 \times 3 = 18$ est un diviseur commun. On a bien $162 = 18 \times 9$ et $108 = 18 \times 6$.

$2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ est un autre diviseur commun. On a $162 = 54 \times 3$ et $108 = 54 \times 2$

$\boxed{\text{18 et 54 sont deux diviseurs communs supérieurs à 10}}$

3.a. On a $108 = 36 \times 3$ mais $162 = 36 \times 4 + 18$.

$\boxed{\text{Il ne peut pas réaliser 36 barquettes car il resterait des nems.}}$

3.b. Il faut déterminer le plus grand diviseur commun à 108 et 162.
En observant les décompositions en facteurs premiers on constate que ce diviseur est $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$.

$\boxed{\text{Il pourra faire au maximum 54 barquettes.}}$

3.c. Comme $162 = 54 \times 3$ et que $108 = 54 \times 2$ on en déduit que

$\boxed{\text{le cuisinier pourra faire 54 barquettes contenant chacune 3 nems et 2 samossas.}}$

Problème n° 2 : Amérique du Sud — Novembre 2018

Correction

Programme de calcul — Tableur — Calcul littéral

1.a. Avec le **Programme n° 1** en partant de 3 on obtient successivement :
3 puis $3 - 5 = -2$ et enfin $-2 \times 4 = -8$.

$\boxed{\text{On obtient } -8}$

1.b. Avec le **Programme n° 2** en partant de 3 on obtient successivement :
3 puis $3 \times 6 = 18$, $18 - 20 = -2$ et enfin $-2 - 2 \times 3 = -2 - 6 = -8$.

$\boxed{\text{On obtient } -8}$

2. Avec le **Programme n° 1** en partant de -2 on obtient successivement :
-2 puis $-2 - 5 = -7$ et enfin $-7 \times 4 = -28$
Avec le **Programme n° 2** en partant de -2 on obtient successivement :
-2 puis $-2 \times 6 = -12$, $-12 - 20 = -32$ et enfin $-20 - 2 \times 2 = -20 - 8 = -28$.

$\boxed{\text{On obtient } -28 \text{ avec les deux programmes en partant de } -2}$

3. $\boxed{\text{On a saisi} = (\text{A2} - 5) * 4}$

4. *Il faut modéliser sous forme d'une expression chacun des deux programmes puis comparer les expressions.*

Notons x le nombre de départ.
Avec le **Programme nº 1** on obtient successivement : x puis $x-5$ et enfin $4(x-5)$
Avec le **Programme nº 2** on obtient successivement : x puis $6x$, $6x-20$ et enfin $6x-20-2x$

On développe : $4(x-5) = 4x-20$.
On réduit : $6x-20-2x = 4x-20$.

$\boxed{\text{Les deux programmes sont donc équivalents.}}$

PROBLÈME Nº 3 : Amérique du Nord — Juin 2018

CORRECTION

Vitesse

$9,7$ Mo ont été téléchargés sur $115,2$ Mo. Il reste donc $115,2\text{ M}o - 9,7\text{ M}o = 105,5\text{ M}o$.

La vitesse de téléchargement est de $1,3\text{ M}o/s$ soit $1,3\text{ M}o$ en une seconde.

$105,5\text{ M}o \div 1,3\text{ M}o \approx 81$. Il reste donc environ $81\ s$ de téléchargement.

Or $81\ s = 1 \times 60\ s + 21\ s$, il reste donc $1\ min\ 21\ s$ de téléchargement.

$\boxed{\text{Non, il reste moins d'une minute vingt-cinq secondes de téléchargement.}}$

PROBLÈME Nº 4 : Polynésie — Juin 2016

CORRECTION

Tâche complexe

1.

	Version essence	**Version diesel**
Consommation de carburant	1 383 L	1 159,6 L
Budget de carburant	1 957 €	1 419,35 €

Le véhicule diesel consomme $5,2$ L pour $100\ km$. M. Durand parcourt $22\,300\ km$.
$22\,300\ km \div 100\ km = 223$ donc $5,2\text{ L} \times 223 = 1\,159,6$ L.
Un litre de gazole coûte environ 1,224 €. Donc 1 159,6 × 1,224 € ≈ 1 419,35 €.

2. La différence de prix entre les deux véhicules vaut : 23 950 € −21 550 € = 2 400 €.
Chaque année la différence de prix sur le carburant vaut : 1 957 € −1 419,35 € = 537,65 €.
Effectuons 2 400 € ÷537,65 € ≈ 4,46.
$\boxed{\text{Il faudra 5 ans pour rentabiliser l'achat d'un véhicule diesel!}}$

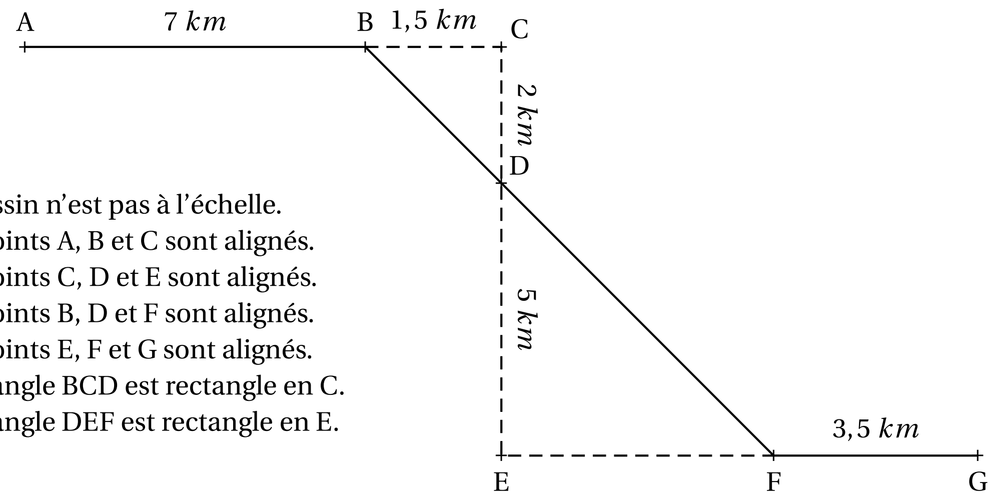
Sur la route . . . du brevet

Livre 2

Théorème de Thalès et de Pythagore — Vitesse — Lecture graphique — Calcul littéral

Problème n° 1 : France — Septembre 2019

Michel participe à un rallye VTT sur un parcours balisé. Le trajet est représenté en traits pleins. Le départ du rallye est en A et l'arrivée est en G.



Le dessin n'est pas à l'échelle.
Les points A, B et C sont alignés.
Les points C, D et E sont alignés.
Les points B, D et F sont alignés.
Les points E, F et G sont alignés.
Le triangle BCD est rectangle en C.
Le triangle DEF est rectangle en E.

1. Montrer que la longueur BD est égale à 2,5 km.
2. Justifier que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
3. Calculer la longueur DF.
4. Calculer la longueur totale du parcours.
5. Michel roule à une vitesse moyenne de 16 km/h pour aller du point A au point B. Combien de temps mettra-t-il pour aller du point A au point B ? Donner votre réponse en minutes et secondes.

Problème n° 2 : Amérique du Sud — Novembre 2019

1. Calculer $5x^2 - 3(2x+1)$ pour $x = 4$.

2. Montrer que, pour toute valeur de x, on a :

$$5x^2 - 3(2x+1) = 5x^2 - 6x - 3$$

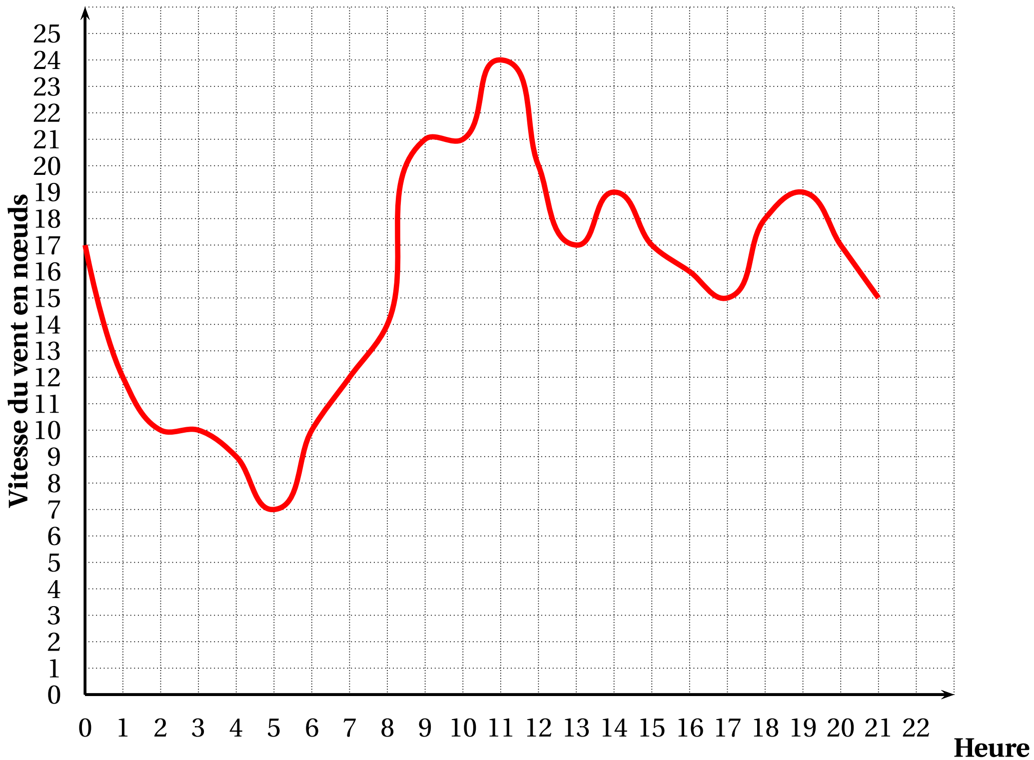
3. Trouver la valeur de x pour laquelle :

$$5x^2 - 3(2x+1) = 5x^2 - 4x + 1$$

Problème n° 3 : Nouvelle-Calédonie — Décembre 2019

Angelo va sur le site « météo NC » pour avoir une idée des meilleurs moments pour faire du cerf-volant avec ses enfants.
Il obtient le graphique ci-dessous qui donne la prévision de la vitesse du vent, en nœuds, en fonction de l'heure de la journée.
Répondre aux questions par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

Vitesse moyenne des vents en nœuds par heure



1.a. Quelle est la vitesse du vent prévue à 14 h ?
1.b À quelles heures prévoit-on 12 nœuds de vent ?
1.c À quelle heure la vitesse du vent prévue est-elle la plus élevée ?
1.d À quelle heure la vitesse du vent prévue est-elle la plus faible ?
2. La pratique du cerf-volant est dangereuse au-dessus de 20 nœuds.
De quelle heure à quelle heure ne faut-il pas faire de cerf-volant ?
On répondra avec la précision permise par le graphique.

Problème n° 1 : France — Septembre 2019 Correction

Théorème de Pythagore — Théorème de Thalès — Vitesse

1.
Dans le triangle BCD rectangle en C,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{CB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BD}^2$$

$$1,5^2+2^2=\mathrm{BD}^2$$

$$2,25+4=\mathrm{BD}^2$$

$$\mathrm{BD}^2=6,25$$

$$\mathrm{BD}=\sqrt{6,25}$$

$$\mathrm{BD}=2,5$$

$\boxed{\text{La longueur BD est égale à } 2,5\ km.}$

2. Le triangle BCD est rectangle en C donc (BC) est perpendiculaire à (CD).
Le triangle DEF est rectangle en E donc (EF) est perpendiculaire à (ED).

Comme les points C, D et E sont alignés, les droites (CD) et (ED) sont identiques.

Or on sait que **Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors les droites sont parallèles.**

$\boxed{\text{Les droites (BC) et (EF) sont parallèles.}}$

3.
Les droites (BF) et (CE) sont sécantes en D, les droites (BC) et (EF) sont parallèles,
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DF}}=\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DE}}=\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{CE}}$$

$$\frac{2,5\ km}{\mathrm{DF}}=\frac{2\ km}{5\ km}=\frac{1,5\ km}{\mathrm{EF}}$$

En utilisant la règle de trois on obtient :
$\mathrm{DF}=\dfrac{5\ km\times 2,5\ km}{2\ km}$ d'où $\mathrm{DF}=\dfrac{12,5\ km^2}{2\ km}$ et $\mathrm{DF}=6,25\ km$

$\boxed{\text{La longueur DF mesure } 6,25\ km.}$

4. $\boxed{\text{La longueur du parcours est : } 7\ km+2,5\ km+6,25\ km+3,5\ km=19,25\ km.}$

5. On se demande combien de temps est nécessaire pour parcourir 7 km à 16 km/h.
On sait qu'a vitesse constante, la distance et le temps sont proportionnels.

Distance	$16\ km$	$7\ km$
Temps	$1\ h=60\ min=3600\ s$	$\dfrac{3600\ s\times 7\ km}{16\ km}=1575\ s$

On peut effectuer une division euclidienne : $1575\ s = 26 \times 60\ s + 15\ s$.

$\boxed{\text{Il mettra } 26\ min\ 15\ s \text{ pour aller du point A au point B.}}$

PROBLÈME N° 2 : Amérique du Sud — Novembre 2019

CORRECTION

Substitution — Développer — Équation du premier degré

1. Pour $x = 4$,
$A = 5x^2 - 3(2x+1) = 5 \times 4^2 - 3(2 \times 4 + 1)$
$A = 5 \times 16 - 3(8+1)$
$A = 80 - 3 \times 9$
$A = 80 - 27 = 53$

$\boxed{\text{Pour } x = 4 \text{, l'expression donne } 53.}$

2. Pour tout x on a :
$A = 5x^2 - 3(2x+1)$
$A = 5x^2 - 6x - 3$

$\boxed{\text{On a bien le résultat attendu.}}$

3. Résolvons :

$$\begin{aligned}
5x^2 - 3(2x+1) &= 5x^2 - 4x + 1\\
5x^2 - 6x - 3 &= 5x^2 - 4x + 1\\
5x^2 - 6x - 3 - 5x^2 &= 5x^2 - 4x + 1 - 5x^2\\
-6x - 3 &= -4x + 1\\
-6x - 3 + 4x &= -4x + 1 + 4x\\
-2x - 3 &= 1\\
-2x - 3 + 3 &= 1 + 3\\
-2x &= 4\\
x &= \frac{4}{-2}\\
x &= -2
\end{aligned}$$

$\boxed{x = -2 \text{ est la solution de cette équation.}}$

Cette équation est assez difficile à résoudre. Il s'agit d'une équation de degré 2 dont les termes en x^2 se simplifient. Ce n'est pas une équation que l'on résoud habituellement en troisième...

PROBLÈME N° 3 : Nouvelle-Calédonie — Décembre 2019

CORRECTION

Lecture graphique

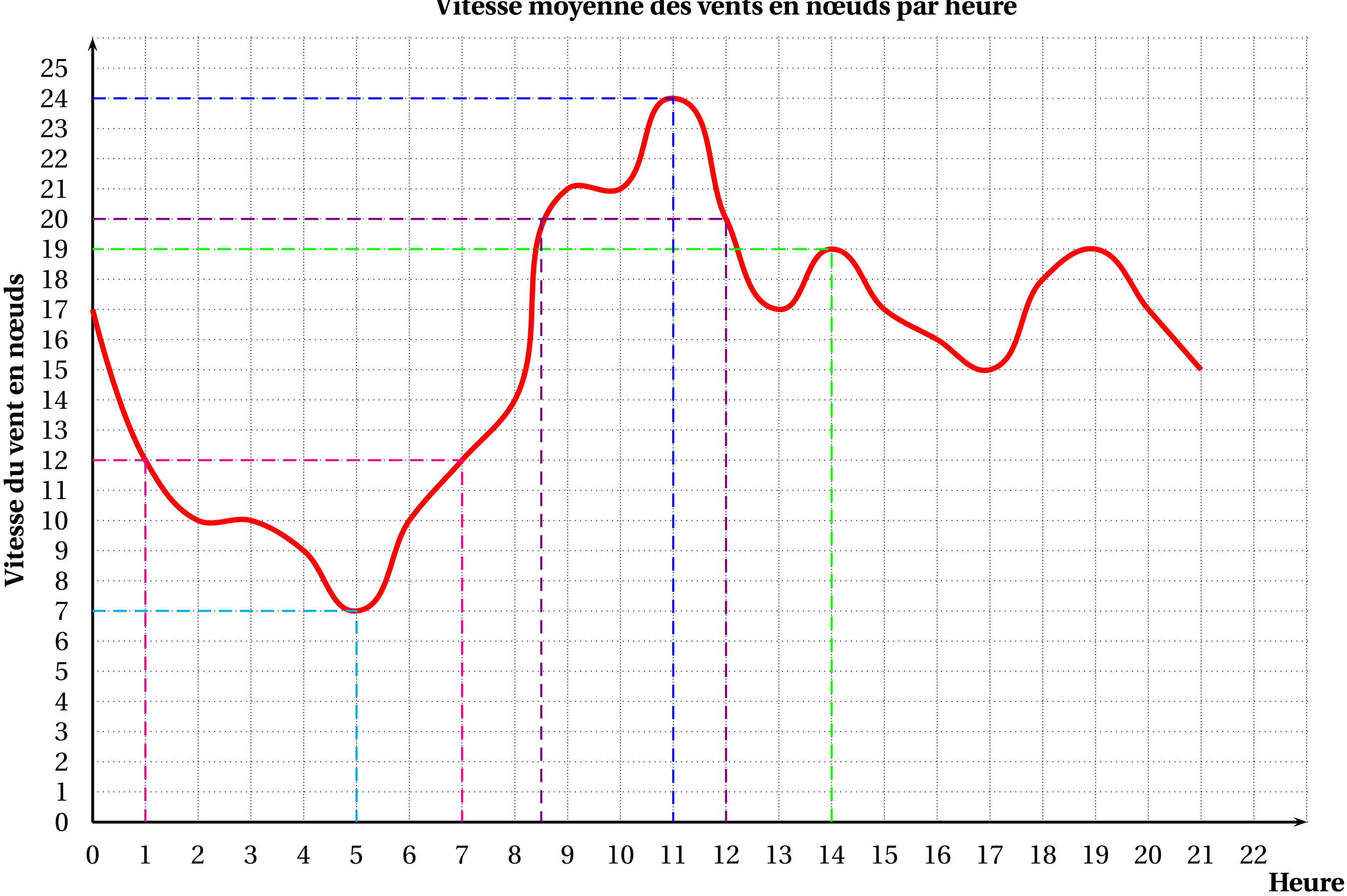
1.a. $\boxed{\text{À 14 h il est prévu 19 nœuds de vent.}}$

1.b $\boxed{\text{Il est prévu 12 nœuds de vent à 1 h et 7 h.}}$

1.c $\boxed{\text{À 11 h la vitesse du vent est la plus élevée, 24 nœuds.}}$

1.d $\boxed{\text{À 5 h la vitesse du vent est la plus faible, 7 nœuds.}}$

2. $\boxed{\text{La vitesse du vent est supérieure à 20 nœuds entre 8,5 h et 12 h.}}$


Vitesse moyenne des vents en nœuds par heure
Vitesse du vent en nœuds
Heure
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25

Calcul littéral

La distributivité

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition.
Plus précisément, si a, b et k sont des nombres alors

$$\underbrace{k \times (a+b)}_{Produit} = \underbrace{k \times a + k \times b}_{Somme}$$

Développer →

← Factoriser

Réduire une expression :

Cela revient à effectuer les sommes des termes de même nature en factorisant.

$A = 3x - 2x^2 + 7 - 6x + 10x^2 + 9$

$A = x^2 \times (-2+10) + x \times (3-6) + 7 + 9$ (on n'écrit pas cette étape)

$A = 8x^2 - 3x + 9$

Exemples :

Développer et réduire :

$B = 3x(5x-1) - 3(-2x+5) - 5x^2$

$B = 15x^2 - 3x + 6x - 15 - 5x^2$

$B = 10x^2 + 3x - 15$ (somme de trois termes)

Factoriser :

$C = 15x + 10x^2$

$C = 5x \times 3 + 5x \times 2x$

$C = 5x(3+2x)$ (produit de deux facteurs)

La double distributivité

En utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition on peut développer des expressions plus complexe.
Si a, b, c, d sont des nombres alors

$$(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

On a distribué deux fois : le a puis le b.
Cette formule n'est pas à apprendre... mais à comprendre !

Développer et réduire des expressions complexes :

$D = (x-3)(2x-1) + (5x+3)(4x+1)$

$D = (2x^2 - x - 6x + 3) + (20x^2 + 5x + 12x + 3)$

$D = 2x^2 - 7x + 3 + 20x^2 + 17x + 3$

$D = 22x^2 + 10x + 6$

$E = (3x+7)(5x-2) - (3x+8)(1-2x)$

Le signe − entre les deux produits !

$E = (15x^2 - 6x + 35x - 14) - (3x - 6x^2 + 8 - 16x)$

$E = 15x^2 + 29x - 14 - 3x + 6x^2 - 8 + 16x$

$E = 21x^2 + 42x - 22$

Factoriser des expressions complexes :

$F = (3x-7)(5x-1) - (3x-7)(2x+1)$

$F = (3x-7)[(5x-1) - (2x+1)]$

$F = (3x-7)(5x-1-2x-1)$

$F = (3x-7)(3x-2)$

$G = (6x-3)^2 + (6x-3)$

$G = (6x-3)(6x-3) + (6x-3) \times 1$

$G = (6x-3)[(6x-3)+1]$

$G = (6x-3)(6x-3-1)$

$G = (6x-3)(6x-4)$

Les identités remarquables

Si a et b sont des nombres alors

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Usage des identités remarquables :

Développer et réduire :

$H = (x+4)^2$

$H = x^2 + 8x + 16$

$I = (5x-3)^2$

$I = 25x^2 - 30x + 9$

$J = (6x+3)(6x-3)$

$J = 36x^2 - 9$

Factoriser

$K = 25x^2 - 36$

$K = (5x)^2 - 6^2$

$K = (5x+6)(5x-6)$

$L = (3x-2)^2 - (7x+5)^2$

$L = [(3x-2) + (7x+5)][(3x-2) - (7x+5)]$

$L = (3x - 2 + 7x + 5)(3x - 2 - 7x - 5)$

$L = (10x+3)(-4x-7)$