Exercices

Exercice n° 5.1 : Un exercice

Factoriser pour résoudre

1. On pense à deux nombres quelconques A et B. On sait que $A \times B = 0$. Que peut-on dire de A et B ?

2. On pose $f(x) = (2x-8)(3x+4)$.

2.a. Développer et réduire $f(x)$.

2.b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3.a. On pose $g(x) = (3x+4)(4x-1)+(3x+4)(7-2x)$. Développer et réduire $g(x)$.

3.b. Factoriser $g(x)$.

3.c. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

4.a. On pose $h(x) = (5x-1)(3x+3)-(5x-1)(6x+3)$. Développer et réduire $h(x)$.

4.b. Factoriser $h(x)$.

4.c. Quels sont les antécédents de 0 par h.

5.a On pose $k(x) = (3x-5)^2-(3x-5)(5x-3)$. Développer et réduire $k(x)$.

5.b. Factoriser $k(x)$.

5.c. Résoudre $k(x) = 0$.

6. On pose $l(x) = (3x+7)(3x-7)$

6.a. Développer et réduire $l(x)$

6.b. On pose $m(x) = 16x^2-36$. Factoriser $m(x)$.

6.c. On pose $p(x) = 25x^2-16$. Factoriser $p(x)$.

7. On pose $q(x) = (5x-7)^2-25$

7.a. Factoriser $q(x)$.

7.b. Résoudre $q(x) = 0$.

8. On pose $r(x) = (3x+1)^2-(2x-3)^2$

8.a. Développer et réduire $r(x)$.

8.b. Factoriser $r(x)$.

8.c. Résoudre $r(x) = 0$.

9. On pose $s(x) = (4x-1)^2-(4x-1)(3x+1)$, $t(x) = (6x-1)(3x+5)-(6x-1)(5x-2)$ et $v(x) = (6x-7)^2-(2x+3)^2$.

9.a. Développer et réduire $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

9.b. Factoriser $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

9.c. Résoudre $s(x) = 0$, $t(x) = 0$ et $v(x) = 0$.

Factoriser pour résoudre — Correction

1. On pense à deux nombres quelconques A et B. On sait que $A \times B = 0$. Que peut-on dire de A et B ?

Pour que le produit soit égal à 0, il faut que l'un des deux nombres soit égal à 0.

Un produit de deux facteurs est égal à 0 si et seulement si un des deux facteurs est égal à 0.

2. On pose $f(x) = (2x-8)(3x+4)$.

2.a. Développer et réduire $f(x)$.

$f(x) = 6x^2 + 8x - 24x - 32$

$\boxed{6x^2 - 16x - 32}$

2.b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

On peut tenter d'utiliser la forme développée.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 6x^2 - 16x - 32 &= 0 \\ 6x^2 - 16x &= 32 \\ x(6x-16) &= 32 \end{aligned}$$

C'est une impasse ! Utilisons la forme factorisée.

$$(2x-8)(3x+4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= 0 \\ 2x - 8 {\color{red}+8} &= 0 {\color{red}+8} \\ 2x&8 \\ x&\frac{8}{2} \\ x&4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 0 \\ 3x + 4 {\color{red}-4} &= 0 {\color{red}-4} \\ 3x &= -4 \\ x &= \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 4 \text{ et } x = \frac{-4}{3}}$

3.a. On pose $g(x) = (3x+4)(4x-1) + (3x+4)(7-2x)$. Développer et réduire $g(x)$.

$g(x) = \left(12x^2 - 3x + 16x - 4\right) + \left(21x - 6x^2 + 28 - 8x\right)$

$\boxed{g(x) = 6x^2 + 26x + 22}$

3.b. Factoriser $g(x)$.

$g(x) = (3x+4)(4x-1) + (3x+4)(7-2x)$
$g(x) = (3x+4)\,[(4x-1)+(7x-2x)]$
$g(x) = (3x+4)(3x-1+7x-2)$

$\boxed{g(x) = (3x+4)(10x-3)}$

3.c. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

$$(3x+4)(10x-3) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x+4 &= 0 \\ 3x+4-4 &= 0-4 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10x-3 &= 0 \\ 10x-3+3 &= 0+3 \\ 10x &= 3 \\ x &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = -\frac{4}{3} \text{ et } x = \frac{3}{10}}$

4.a. On pose $h(x) = (5x-1)(3x+3) - (5x-1)(6x+3)$. Développer et réduire $h(x)$.

$h(x) = (5x-1)(3x+3) - (5x-1)(6x+3)$
$h(x) = \left(15x^2+15x-3x-3\right) - \left(30x^2+15x-6x-3\right)$
$h(x) = 15x^2+15x-3x-3-30x^2-15x+6x+3$

$\boxed{h(x) = -15x^2+3x}$

4.b. Factoriser $h(x)$.

$h(x) = (5x-1)(3x+3) - (5x-1)(6x+3)$
$h(x) = (5x-1)\,((3x+3)-(6x+3))$
$h(x) = (5x-1)(3x+3-6x-3)$
$h(x) = (5x-1)(-3x)$

$\boxed{h(x) = -3x(5x-1)}$

4.c. Quels sont les antécédents de 0 par h.

Il faut résoudre l'équation $h(x) = 0$.

$$-3x(5x-1) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} -3x &= 0 \\ x &= \frac{0}{-3} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x-1 &= 0 \\ 5x-1+1 &= 0+1 \\ 5x &= 1 \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0 \text{ et } x = \frac{1}{5}}$

5.a On pose $k(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(5x-3)$. Développer et réduire $k(x)$.

$k(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = (3x-5)(3x-5) - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = \left(9x^2 - 15x - 15x + 25\right) - \left(15x^2 - 9x - 25x + 15\right)$
$k(x) = 9x^2 - 15x - 15x + 25 - 15x^2 + 9x + 25x - 15$

$\boxed{k(x) = -6x^2 + 4x + 10}$

5.b. Factoriser $k(x)$.

$k(x) = (3x-5)^2 - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = (3x-5)(3x-5) - (3x-5)(5x-3)$
$k(x) = (3x-5)\left((3x-5) - (5x-3)\right)$
$k(x) = (3x-5)(3x-5-5x+3)$

$\boxed{k(x) = (3x-5)(-2x-2)}$

5.c. Résoudre $k(x) = 0$.

$$(3x-5)(-2x-2) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 3x-5 &= 0 \\ 3x-5+5 &= 0+5 \\ 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x-2 &= 0 \\ -2x-2+2 &= 0+2 \\ -2x &= 2 \\ x &= \frac{2}{-2} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = \frac{5}{3} \text{ et } x = -1}$

6. On pose $l(x) = (3x+7)(3x-7)$

6.a. Développer et réduire $l(x)$

$l(x) = (3x+7)(3x-7)$
$l(x) = 9x^2 - 21x + 21x - 49$

$\boxed{l(x) = 9x^2 - 49}$

a et b des nombres quelconques.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

6.b. On pose $m(x) = 16x^2 - 36$. Factoriser $m(x)$.

$m(x) = 16x^2 - 36$
$m(x) = (4x)^2 - 6^2$

$\boxed{m(x) = (4x+6)(4x-6)}$

6.c. On pose $p(x) = 25x^2 - 16$. Factoriser $p(x)$.

7. On pose $q(x) = (5x-7)^2 - 25$

7.a. Factoriser $q(x)$.

$q(x) = (5x-7)^2 - 25$
$q(x) = (5x-7)^2 - 5^2$
$q(x) = ((5x-7)+5)\,((5x-7)-5)$
$q(x) = (5x-7+5)(5x-7-5)$

$\boxed{q(x) = (5x-2)(5x-12)}$

7.b. Résoudre $q(x) = 0$.

$$(5x-2)(5x-12) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 5x-2 &= 0 \\ 5x-2+2 &= 0+2 \\ 5x &= 2 \\ x &= \frac{2}{5} \\ x &= 0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x-12 &= 0 \\ 5x-12+12 &= 0+12 \\ 5x &= 12 \\ x &= \frac{12}{5} \\ x &= 2,4 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0,4 \text{ et } x = 2,4}$

8. On pose $r(x) = (3x+1)^2 - (2x-3)^2$

8.a. Développer et réduire $r(x)$.

$r(x) = (3x+1)^2 - (2x-3)^2$
$r(x) = (3x+1)(3x+1) - (2x-3)(2x-3)$
$r(x) = \left(9x^2 + 3x + 3x + 1\right) - \left(4x^2 - 6x - 6x + 9\right)$
$r(x) = 9x^2 + 3x + 3x + 1 - 4x^2 + 6x + 6x - 9$

$\boxed{r(x) = 5x^2 + 18x - 8}$

8.b. Factoriser $r(x)$.

$r(x) = (3x+1)^2 - (2x-3)^2$

On reconnaît une expression de la forme $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$ *avec* $\mathrm{A} = (3x+1)$ *et* $\mathrm{B} = (2x-3)$

$r(x) = [(3x+1)+(2x-3)]\,[(3x+1)-(2x-3)]$
$r(x) = (3x+1+2x-3)(3x+1-2x+3)$

$\boxed{r(x) = (5x-2)(x+4)}$

8.c. Résoudre $r(x) = 0$.

$$(5x-2)(x+4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=0+2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}$$
$$x=0,4$$

$$x+4=0$$
$$x+4-4=0-4$$
$$x=-4$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x=0,4 \text{ et } x=-4}$

9. On pose $s(x)=(4x-1)^2-(4x-1)(3x+1)$, $t(x)=(6x-1)(3x+5)-(6x-1)(5x-2)$ et $v(x)=(6x-7)^2-(2x+3)^2$.

9.a. Développer et réduire $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

$s(x)=(4x-1)^2-(4x-1)(3x+1)$
$s(x)=(4x-1)(4x-1)-(4x-1)(3x+1)$
$s(x)=\left(16x^2-4x-4x+1\right)-\left(12x^2+4x-3x-1\right)$
$s(x)=16x^2-4x-4x+1-12x^2-4x+3x+1$

$\boxed{s(x)=4x^2-9x+2}$

$t(x)=(6x-1)(3x+5)-(6x-1)(5x-2)$
$t(x)=\left(18x^2+30x-3x-5\right)-\left(30x^2-12x-5x+2\right)$
$t(x)=18x^2+30x-3x-5-30x^2+12x+5x-2$

$\boxed{t(x)=-12x^2+44x-7}$

$v(x)=(6x-7)^2-(2x+3)^2$
$v(x)=(6x-7)(6x-7)-(2x+3)(2x+3)$
$v(x)=\left(36x^2-42x-42x+49\right)-\left(4x^2+6x+6x+9\right)$
$v(x)=36x^2-42x-42x+49-4x^2-6x-6x-9$

$\boxed{v(x)=32x^2-96x+40}$

9.b. Factoriser $s(x)$, $t(x)$ et $v(x)$.

$s(x)=(4x-1)^2-(4x-1)(3x+1)$
$s(x)=(4x-1)(4x-1)-(4x-1)(3x+1)$
$s(x)=(4x-1)\,[(4x-1)-(3x+1)]$
$s(x)=(4x-1)(4x-1-3x-1)$

$\boxed{s(x)=(4x-1)(x-2)}$

$t(x)=(6x-1)(3x+5)-(6x-1)(5x-2)$
$t(x)=(6x-1)\,[(3x+5)-(5x-2)]$
$t(x)=(6x-1)(3x+5-5x+2)$

$\boxed{t(x)=(6x-1)(-2x+7)}$

$v(x)=(6x-7)^2-(2x+3)^2$
$v(x)=[(6x-7)+(2x+3)]\,[(6x-7)-(2x+3)]$
$v(x)=(6x-7+2x+3)(6x-7-2x-3)$

$\boxed{v(x)=(8x-4)(4x-10)}$

9.c. Résoudre $s(x) = 0$, $t(x) = 0$ et $v(x) = 0$.

$$s(x) = 0$$

$$(4x-1)(x-2) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 4x-1 &= 0 \\ 4x-1{\color{red}+1} &= 0{\color{red}+1} \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} \\ x &= 0,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-2 &= 0 \\ x-2{\color{red}+2} &= 0{\color{red}+2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0,25 \text{ et } x = 2}$

$$t(x) = 0$$

$$(6x-1)(-2x+7) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 6x-1 &= 0 \\ 6x-1{\color{red}+1} &= 0{\color{red}+1} \\ 6x &= 1 \\ x &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x+7 &= 0 \\ -2x+7{\color{red}-7} &= 0{\color{red}-7} \\ -2x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{2} \\ x &= -3,5 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = \frac{1}{6} \text{ et } x = -3,5}$

$$v(x) = 0$$

$$(8x-4)(4x-10) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul

$$\begin{aligned} 8x-4 &= 0 \\ 8x-4{\color{red}+4} &= 0{\color{red}+4} \\ 8x &= 4 \\ x &= \frac{4}{8} \\ x &= \frac{1}{2} \\ x &= 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x-10 &= 0 \\ 4x-10{\color{red}+10} &= 0{\color{red}+10} \\ 4x &= 10 \\ x &= \frac{10}{4} \\ x &= \frac{5}{2} \\ x &= 2,5 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc deux solutions : } x = 0,5 \text{ et } x = 2,5}$

Évaluation de mathématiques

Question de cours

Recopier sur votre copie les trois identités remarquables.

Exercice 1

Développer les expressions suivantes :

$A = (x+6)^2$

$B = (3x-7)^2$

$C = (4x-3)(4x+3)$

$D = (5x-3)^2$

$E = (6x+8)^2$

$F = (7x+8)(7x-8)$

$G = (5x+10)(5x-10)$

$H = (7x-9)^2$

$I = (4x+8)^2$

Exercice 2

On pose $f(x) = (5x-8)^2 - (5x-8)(7x+3)$.

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Factoriser $f(x)$.

3. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.

4. Résoudre l'équation $(5x-8)(-2x-11) = 0$.

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f.

Exercice 3

Voici un programme de calcul :

— Choisir un nombre ;
— Le multiplier par 9 ;
— Ajouter 30 ;
— Multiplier le tout par le nombre de départ ;
— Ajouter 25.

1. Montrer qu'en choisissant -2 pour nombre de départ on obtient 1 à la fin.

2. Utiliser ce programme de calcul en prenant 3 puis 5 comme nombre de départ.

On appelle g la fonction qui a un nombre de départ x donne le résultat final $g(x)$.

3. Donner l'expression de $g(x)$ et montrer en développant que $g(x) = 9x^2 + 30x + 25$.

4. Développer $(3x+5)^2$.

5. Expliquer pourquoi quand on choisit un nombre entier au départ le résultat est toujours le carré d'un nombre entier.

6. Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir 0 à la fin ?

Évaluation de mathématiques – Correction

QUESTION DE COURS

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2-b^2$

EXERCICE 1

Développer les expressions suivantes :

A = $(x+6)^2 = \boxed{x^2+12x+36}$ D = $(5x-3)^2 = \boxed{25x^2-30x+9}$ G = $(5x+10)(5x-10) = \boxed{25x^2-100}$

B = $(3x-7)^2 = \boxed{9x^2-42x+49}$ E = $(6x+8)^2 = \boxed{36x^2+96x+64}$ H = $(7x-9)^2 = \boxed{49x^2-126x+81}$

C = $(4x-3)(4x+3) = \boxed{16x^2-9}$ F = $(7x+8)(7x-8) = \boxed{49x^2-64}$ I = $(4x+8)^2 = \boxed{16x^2+64x+64}$

EXERCICE 2

1. $f(x) = (5x-8)^2-(5x-8)(7x+3)$.
$f(x) = 25x^2-80x+64-(35x^2+15x-56x-24)$
$f(x) = 25x^2-80x+64-35x^2-15x+56x+24$
$\boxed{f(x) = -10x^2-39x+88}$

2. $f(x) = (5x-8)^2-(5x-8)(7x+3)$
$f(x) = (5x-8)\,[(5x-8)-(7x+3)]$
$f(x) = (5x-8)(5x-8-7x-3)$
$\boxed{f(x) = (5x-8)(-2x-11)}$

3. $f(-1) = -10\times(-1)^2-39\times(-1)+88$ donc $f(-1) = -10+39+88 = \boxed{116}$
$f(2) = -10\times 2^2-39\times 2+88$ donc $f(2) = -10\times 4-78+88 = -40+10 = \boxed{-30}$

4. Résoudre l'équation $(5x-8)(-2x-11) = 0$

Un produit de facteurs est nul à la seule condition que l'un des facteurs soit nul.

$5x-8 = 0 \qquad 5x = 8$

$5x-8+8 = 0+8 \qquad x$

5. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f.

EXERCICE 3

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre;
- Le multiplier par 9;
- Ajouter 30;
- Multiplier le tout par le nombre de départ;
- Ajouter 25.

1. Montrer qu'en choisissant −2 pour nombre de départ on obtient 1 à la fin.

2. Utiliser ce programme de calcul en prenant 3 puis 5 comme nombre de départ.

On appelle g la fonction qui a un nombre de départ x donne le résultat final $g(x)$.

3. Donner l'expression de $g(x)$ et montrer en développant que $g(x) = 9x^2+30x+25$.

4. Développer $(3x+5)^2$.

5. Expliquer pourquoi quand on choisit un nombre entier au départ le résultat est toujours le carré d'un nombre entier.

6. Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir 0 à la fin?