Chapitre VI

Proportionnalité et fonction linéaire

Tous le reste

Plan du cours :

a

Programme (***BO n° 30 du 26-7-2018***) **:**

— a

Compétences :

— a

SITUATION INITIALE : Intérêts, crédit et agios : banque et mathématiques

LIVRET JEUNE

Le Livret Jeune est un compte d'épargne défiscalisé reservé aux jeunes entre 12 et 25 ans. Les versements sur ce compte ne peuvent pas dépasser 1 600 € en dehors des intérêts. La banque LGL propose un compte rémunéré à 2 %.

1. Le 1erjanvier de l'année de ses 12 ans, les parents de Mathéo ont placé 1 600 € sur un Livret Jeune de la LGL. Quels intérêts ont été ajoutés sur ce compte un an plus tard ?

2. Combien aura Mathéo sur son compte pour sa majorité ?

3. Combien aura Mathéo sur son compte l'année de ses 25 ans ?

LE DÉCOUVERT AUTORISÉ

Ma conseillère financier m'a accordé un découvert autorisé de 1 500 €. Le montant des agios est fixé à 15 % annuel, cela signifie que 100 € de découvert pendant une année de 365 jours coûte 15 €.
1. Le mois dernier j'ai eu 450 € de découvert pendant 12 jours. Combien cela va-t-il me coûter ?

2. La durée maximale d'un découvert autorisé est de 30 jours. Combien coûte un découvert de 1 500 € pendant 30 jours ?

LE CRÉDIT BANCAIRE

Je souhaite acquérir une moto. Elle coûte 15 000 €. Ma banque me propose un crédit à la consommation au TAEG de 5 % sur 5 ans. On me propose un crédit à amortissement constant.

1. Sans tenir compte des intérêts d'emprunt, quelle somme constante (l'amortissement) vais-je rembourser chaque mois pour cette moto ?

Pour me faire payer les intérêts d'emprunt, ma banque calcule au début de chaque année le reste de la somme que je lui dois et elle me fait payer 5 % de cette somme en intérêts d'emprunt annuel. Ces intérêts sont ensuite répartis équitablement sur chacune des mensualités.

2. Quels intérêts d'emprunt vais-je payer la première année ? Quelles seront les mensualités durant la première année du crédit ?

3. Quelles seront les mensualités durant la deuxième année du crédit ?

4. Quelle seront les mensualités durant les trois années suivantes ?

5. Combien aura coûté finalement cette moto à la fin du remboursement de ce crédit ?

6. Pour l'achat d'une maison à 210 000 € sur 20 ans au TAEG de 2 %, pour quelle raison la banque ne peut-elle pas proposer un emprunt à amortissement constant ?

Agios : ensemble des frais perçus par la banque pour le fonctionnement d'un compte.
Amortissement : partie du capital emprunté qui est remboursé à chaque échéance, par exemple chaque mois.
Compte epargne : compte sur lequel les fonds sont disponibles sous forme de retrait d'espèces, il est forcément créditeur et peut faire l'objet d'une rémunération sous forme d'intérêts fiscalisés ou non.
Crédit à la consommation : prêt accordé par une banque au particulier pour financer un achat important.
Intérêts d'emprunt : rémunération du prêt que l'emprunteur verse périodiquement au prêteur.
Mensualités : sommes versées mensuellement pour rembourser un crédit à la consommation.

I — Augmentation et diminution en pourcentage

Propriété 6.1 : Augmentation et diminution en pourcentage

On note x un nombre positif quelconque.

Augmenter une grandeur de x % revient à multiplier cette grandeur par $1+\dfrac{x}{100}$

Diminuer une grandeur de x % revient à multiplier cette grandeur par $1-\dfrac{x}{100}$

Démonstration :

Sur un exemple générique. Notons G une grandeur.

Augmentons cette grandeur de 20 %.
20 % de G revient à effectuer $G\times\dfrac{20}{100}=0,20G$
Ajoutons l'augmentation, la grandeur augmentée est : $G+0,20G=G\times 1+G\times 0,20=G\times(1+0,20)$ on factorise G!
On obtient bien $G\times(1+0,20)=G\times(1+\dfrac{20}{100})=1,20G$

Diminuons cette grandeur de 20 %.
On reprend le raisonnement précédent, la grandeur diminuée est : $G-0,20G=G\times 1-G\times 0,20=G\times(1-0,20)$.
On obtient bien $G\times(1-0,20)=G\times(1-\dfrac{20}{100})=0,80G$

CQFD

Exemples :
Augmenter une grandeur de 35 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{35}{100}=1+0,35=1,35$

Diminuer une grandeur de 35 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{35}{100}=1-0,35=0,65$

Augmenter une grandeur de 2,7 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{2,7}{100}=1+0,027=1,027$

Diminuer une grandeur de 1 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{1}{100}=1-0,01=0,99$

Remarques :
Augmenter une grandeur de 100 % revient à la multiplier par $1+\dfrac{100}{100}=1+1=2$

Diminuer une grandeur de 100 % revient à la multiplier par $1-\dfrac{100}{100}=0$

Diminuer d'un pourcentage inférieur à 100 % n'a pas de sens! Par contre une augmentation est possible.

Augmenter une grandeur de 5 000 % revient à multiplier par $1+\dfrac{5\,000}{100}=1+50=51$

Attention au biais cognitif suivant : augmenter de 300 % revient à multiplier par 4 et pas 3!!!

MÉTHODE 6 . 1 : Effectuer une diminution ou une augmentation en pourcentage
Un livret d'épargne rémunère les dépôts de 1,5 % par an. On dépose 5 000 €sur ce livret.
De quelle montant dispose t-on au bout d'un an ? de deux ans ? de dix ans ?

Augmenter de 1,5 % revient à multiplier par $1+\dfrac{1,5}{100}=1+0,015=1,015$

Au bout d'un an il y aura : 5000 € $\times 1,015 = 5075$ €.

Au bout de deux ans on aura : 5075 € $\times 1,015 = 5151,125$ € soit 5000 € $\times 1,015 \times 1,015 = 5000$ € $\times 1,015^2$

Au bout de dix ans on aura : 5000 € $\times \underbrace{1,015 \times 1,015 \times \ldots \times 1,015}_{10 \text{ fois}} = 5000$ € $\times 1,015^{10} = 5802,704$ €.

MÉTHODE 6 . 2 : Déterminer une augmentation ou une diminution en pourcentage
Un prix est passé de 75 € à 57 €. Quel est le pourcentage de diminution ?

Il faut chercher le coefficient multiplicateur k tel que $75 \times k = 57$

Ainsi $k = \dfrac{57}{75} = 0,76$.

Or $0,76 = 1 - 0,24 = 1 - \dfrac{24}{100}$. On peut remarquer que 76 % + 24 % = 100 % !

Il s'agit d'une diminution de 24 %.

II — La fonction linéaire

❧ DÉFINITION 6.1 : La fonction linéaire

On choisit a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est définie ainsi :

$$f : x \to a \times x$$

La fonction linéaire de coefficient a modélise le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre ;
- Le multiplier par a ;
- Écrire le résultat.

EXEMPLES :

$f(x) = 5x$	– la fonction linéaire de coefficient 5
$g(x) = x$	– la fonction linéaire de coefficient 1 car $x = 1 \times x$
$h(x) = -x$	– la fonction linéaire de coefficient -1 car $-x = -1 \times x$
$k(x) = -3x$	– la fonction linéaire de coefficient 3
$l(x) = \dfrac{x}{5}$	– la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{5}$ car $\dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{5} \times x$
$m(x) = 3x + 6$	– ce n'est pas une fonction linéaire à cause du $+6$
$p(x) = 4x^2$	– ce n'est pas une fonction linéaire à cause du x^2
$t(x) = \dfrac{1}{x}$	– ce n'est pas une fonction linéaire

PROPRIÉTÉ 6.2 : Fonction linéaire et proportionnalité

Les images et les antécédents par une fonction linéaire sont proportionnels.
Le coefficient de proportionnalité correspond au coefficient de la fonction linéaire.

DÉMONSTRATION :

a un nombre et f la fonction linéaire de coefficient a.
Pour un nombre x quelconque, son image est $f(x) = ax$. On constate que $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{ax}{x} = a$
Cela prouve que x et $f(x)$ sont proportionnels.

CQFD

EXEMPLE :
Soit g la fonction linéaire de coefficient $-3,25$.
Dressons un tableau de valeurs de cette fonction.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	13	9,75	6,5	3,25	0	-3,25	-6,5	-9,75	-13

Ce tableau est bien un tableau de proportionnalité de coefficient $-3,25$.

MÉTHODE 6 . 3 : Déterminer une fonction linéaire connaissant un nombre et son image
Soit f une fonction linéaire telle que $f(3) = -2$.

Il faut déterminer le coefficient a de cette fonction.
Comme pour tout x on a $f(x) = ax$ or $f(3) = -2$, on en déduit que $a \times 3 = -2$ d'où $a = -\dfrac{2}{3}$

Il s'agit de la fonction linéaire de coefficient $-\dfrac{2}{3}$.

PROPRIÉTÉ 6.3 :

Si f est une fonction linéaire alors $f(0) = 0$

DÉMONSTRATION :

f la fonction linéaire de coefficient a donc pour tout nombre x on a $f(x) = ax$
Ainsi $f(0) = a \times 0 = 0$

CQFD

PROPRIÉTÉ 6.4 : Fonction linéaire et représentation graphique

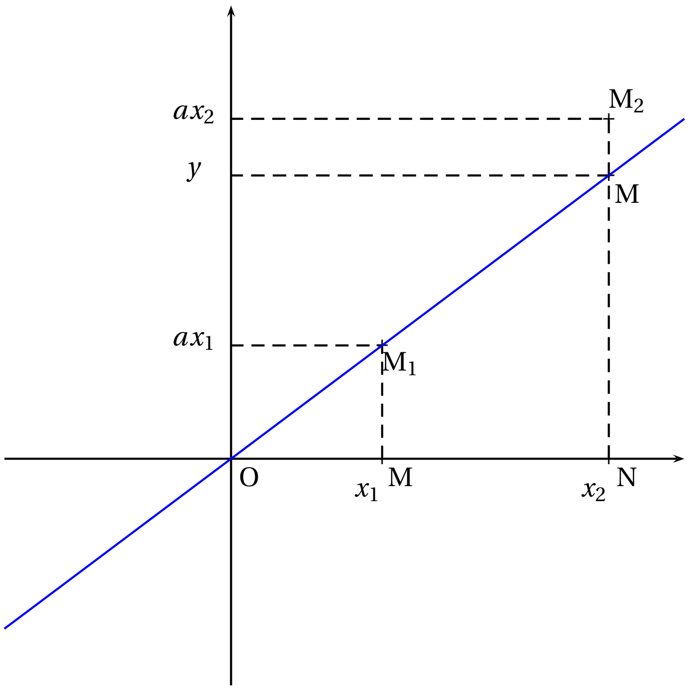
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

DÉMONSTRATION :

a un nombre quelconque et x_1 et x_2 deux nombres quelconques différents.
Nous pouvons commencer par traiter le cas où x_1 et x_2 sont positifs.

Considérons les points $\mathrm{O}(0;0)$, $\mathrm{M}_1(x_1, ax_1)$ et $\mathrm{M}_2(x_2; ax_2)$.
O, M_1 et M_2 sont trois points distincts de la représentation graphique de la fonctions linéaire de coefficient a, $f(x) = ax$.
Nous allons montrer que ces points sont alignés.

Considérons la droite (OM_1) et un point $\mathrm{M}(x_2; y_2)$ de la droite $(0\mathrm{M}_1)$ d'abscisse x_2. Nous allons prouver que $y_2 = ax_2$.



Dans le triangle OMN, comme les droites (MM_1) et (NN_1) sont perpendiculaires à l'axe des abscisses, elles sont parallèles entre elles.
Nous pouvons donc utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{ON}{ON_1} = \frac{MM_1}{NN_1}$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{ON}{ON_1} = \frac{ax_1}{y}$$

Ainsi comme $\frac{x_1}{x_2} = \frac{ax_1}{y}$ on a $y = \frac{x_2 \times ax_1}{x_1} = ax_2$

Ainsi le point M a pour coordonnées $M(x_1; ax_1)$, il s'agit du point M_1.

Cela prouve que deux points quelconques, M_1 et M_2, de la représentation graphique de la fonction linéaire, $f(x) = ax$, sont alignés avec l'origine du repère.

Si x_1 et x_2 sont négatifs, on peut effectuer une symétrie de centre O pour obtenir deux points M_1' et M_2' dont les abscisses sont positives. Ces points sont donc alignés avec l'origine d'après la première partie. Or par propriété de la symétrie centrale, O, M_1 et $M'1$ sont alignés ainsi que 0, M_2 et M_2'. Finalement O, M_1 et M_2 sont bien alignés.

Si x_1 ou x_2 est négatif, on raisonne de la même manière avec un seul symétrique.

CQFD

III — Annexes

1 Exercices

Exercice n° 6.1 : Le rectangle

On considère une rectangle de 5 cm de longueur et de 4 cm de large.
On augmente sa largeur de 20 % et on diminue sa longueur de 20 %.

L'aire du rectangle a-t-elle augmenté ou diminué ? Quel est le pourcentage d'augmentation ou de diminution ?

Exercice n° 6.2 : Reconnaissance de fonctions

Voici des fonctions. Indiquez lesquelles sont des fonctions linéaires en justifiant votre réponse.

$f(x) = -3x$
$g(x) = 1 - 5x$
$h(x) = x$
$k(x) = 1$

$l(x) = 0$
$m(x) = \dfrac{x}{7}$
$n(x) = 3x^2$
$t(x) = 3,14159x$

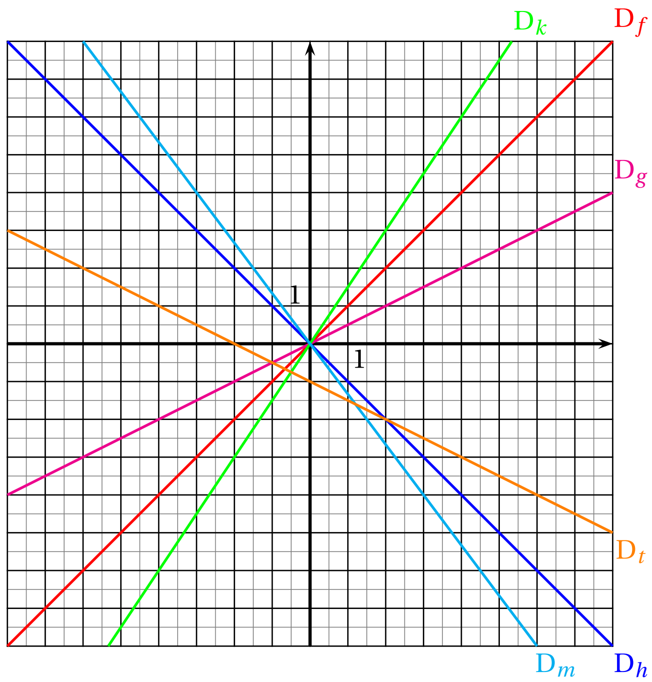
Exercice n° 6.3 : Détermination d'une fonction linéaire

1. h est une fonction linéaire dont on sait que $h(5) = -2$. Quel est le coefficient de cette fonction ?

2. Déterminer la fonction linéaire k pour laquelle l'image de -3 est 4.

3. t une fonction linéaire telle que $t(-2) = 3$. Calculer en justifiant $t(3)$.

Exercice n° 6.4 : Fonction linéaire et représentation graphique



Ci-dessus ont été tracé les représentations graphiques des fonctions f, g, h, k, m et t. Chacune de ces représentation est une droite.
Lesquelles de ces droites sont les représentations graphiques de fonctions linéaires et quel est le coefficient de chacune des ces fonctions ?

EXERCICE N° 6.1 : Le rectangle

CORRECTION

On considère une rectangle de 5 cm de longueur et de 4 cm de large.
On augmente sa largeur de 20 % et on diminue sa longueur de 20 %.

L'aire du rectangle avant transformation était : $\mathbb{A} = 5\ cm \times 4\ cm = 20\ cm^2$

En augmentant sa largeur de 20 % elle devient : $4\ cm \times 1,20 = 4,8\ cm$
En diminuant sa longueur de 20 % elle devient : $5\ cm \times 0,80 = 4\ cm$

L'aire après transformation est donc : $\mathbb{B} = 4\ cm \times 4,8\ cm = 19,2\ cm^2$

Il s'agit donc d'une diminution.

Notons k le coefficient d'agrandissement/réduction on a $20\ cm^2 \times k = 19,2\ cm^2$ d'où $k = \dfrac{19,2\ cm^2}{20\ cm^2} = 0,96$

Comme $0,96 = 1 - 0,04 = 1 - \dfrac{4}{100}$: $\boxed{\text{il s'agit d'une diminution de 4 \%}}$.

D'autre part on peut remarquer que $1,20 \times 0,80 = 0,96$ ce qui donne aussi le résultat !

EXERCICE N° 6.2 : Reconnaissance de fonctions

CORRECTION

Voici des fonctions. Indiquez lesquelles sont des fonctions linéaires en justifiant votre réponse.
$f(x) = -3x$: oui, linéaire de coefficient -3.
$g(x) = 1 - 5x$: oui, linéaire de coefficient $-1,5$
$h(x) = x$: oui, linéaire de coefficient 1
$k(x) = 1$: non, elle n'est pas linéaire car $1 \neq ax$ pour tous nombres a.
$l(x) = 0$: oui, elle est linéaire car $0 = 0 \times x$, donc de coefficient 0.
$m(x) = \dfrac{x}{7}$: oui, elle est linéaire de coefficient $\dfrac{1}{7}$ car $\dfrac{x}{7} = \dfrac{1}{7} \times x$
$n(x) = 3x^2$: non, elle n'est pas linéaire.
$t(x) = 3,14159x$: oui, elle est linéaire de coefficient $3,14159$

EXERCICE N° 6.3 : Détermination d'une fonction linéaire

CORRECTION

1. h est une fonction linéaire dont on sait que $h(5) = -2$. Quel est le coefficient de cette fonction ?

On sait que $h(x) = ax$ et que $h(5) = -2$ donc $a \times 5 = -2$ d'où $a = -\dfrac{2}{5} = -0,4$.

Le coefficient est $-0,4$. Il s'agit de la fonction $\boxed{h(x) = -0,4x}$.

2. Déterminer la fonction linéaire k pour laquelle l'image de -3 est 4.

Même technique. $k(x) = ax$ donc comme $k(-3) = 4$ on a $a \times (-3) = 4$ et $a = -\dfrac{4}{3}$.

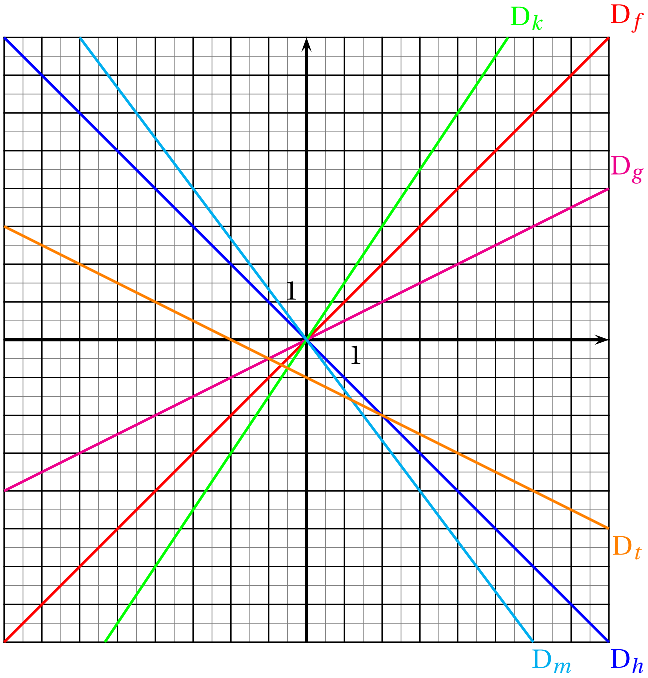
Le coefficient est $-\dfrac{4}{3}$. Il s'agit de la fonction $\boxed{k(x) = -\dfrac{4}{3}x}$.

3. t une fonction linéaire telle que $t(-2) = 3$. Calculer en justifiant $t(3)$.

$t(x) = ax$ et $t(-2) = 3$ donc $-2 \times a = 3$ et $a = -\dfrac{3}{2} = -1,5$

La fonction t est linéaire de coefficient $-1,5$ donc $t(x) = -1,5x$, ainsi $\boxed{t(3) = -1,5 \times 3 = -4,5}$.

EXERCICE N° 6.4 : Fonction linéaire et représentation graphique



Ci-dessus ont été tracé les représentations graphiques des fonctions f, g, h, k, m et t. Chacune de ces représentation est une droite.
Lesquelles de ces droites sont les représentations graphiques de fonctions linéaires et quel est le coefficient de chacune des ces fonctions?

Les fonctions f, g, h, k et m sont linéaires car leurs représentation sont des droites passant par l'origine.
La fonction t n'est pas linéaire car la droite qui la représente ne passe pas par l'origine.

La droite D_f passe par le point $(2;2)$ (on peut choisir n'importe quel point!).
Comme f est linéaire, elle s'écrit $f(x) = ax$. On a donc $f(2) = 2$ donc $a \times 2 = 2$ d'où $a = 1$.

f est la fonction linéaire de coefficient 1 c'est à dire $\boxed{f(x) = 1x = x}$.

La droite D_g passe par le point $(4;2)$ (on peut choisir n'importe quel point!).
Comme g est linéaire, elle s'écrit $g(x) = ax$. On a donc $g(4) = 2$ donc $a \times 4 = 2$ d'où $a = \dfrac{2}{4} = 0,5$.

g est la fonction linéaire de coefficient $0,5$ c'est à dire $\boxed{g(x) = 0,5x}$.

La droite D_h passe par le point $(1;-1)$ (on peut choisir n'importe quel point!).
Comme h est linéaire, elle s'écrit $h(x) = ax$. On a donc $h(1) = -1$ donc $a \times 1 = -1$ d'où $a = -1$.

h est la fonction linéaire de coefficient -1 c'est à dire $\boxed{h(x) = -1x = -x}$.

La droite D_k passe par le point $(2;3)$ (on peut choisir n'importe quel point!).
Comme k est linéaire, elle s'écrit $k(x) = ax$. On a donc $k(2) = 3$ donc $a \times 2 = 3$ d'où $a = \dfrac{3}{2} = 1,5$.

k est la fonction linéaire de coefficient $1,5$ c'est à dire $\boxed{k(x) = 1,5x}$.

La droite D_m passe par le point $(3;-4)$ (on peut choisir n'importe quel point!).
Comme m est linéaire, elle s'écrit $m(x) = ax$. On a donc $m(3) = -4$ donc $a \times 3 = -4$ d'où $a = -\dfrac{4}{3}$.

m est la fonction linéaire de coefficient $-\dfrac{4}{3}$ c'est à dire $\boxed{m(x) = -\dfrac{4}{3}x = -\dfrac{4x}{3}}$.

Pourcentages et fonction linéaire

Augmentation et diminution en pourcentage

x est un nombre positif.

Augmenter une grandeur de x % revient à la multiplier par $1+\dfrac{x}{100}$;

Diminuer une grandeur de x % revient à la multiplier par $1-\dfrac{x}{100}$.

Coefficient d'agrandissement-réduction :

Quand on multiplie une grandeur par un nombre supérieur à 1 on augmente la grandeur.
Quand on multiplie une grandeur par 1 on ne change pas la grandeur.
Quand on multiplie une grandeur par un nombre inférieur à 1 on diminue la grandeur.

Exemple :

Un commerçant diminue tous les prix de 30 % puis un peu plus tard il augmente tous les prix de 30 %. Les prix ont-ils retrouvé le niveau de départ ?

Prenons pour exemple un prix $\mathrm{P} = 67$ €.

Diminuer ce prix de 30 % revient à multiplier ce prix par $1-\dfrac{30}{100} = 1-0,30 = 0,70$

Le prix diminué est donc $\mathrm{D} = 0,70 \times \mathrm{P} = 0,70 \times 67$ € $= 46,90$ €.

Augmenter ce prix de 30 % revient à multiplier ce prix par $1+\dfrac{30}{100} = 1+0,30 = 1,30$.

Le prix augmenté est donc $\mathrm{A} = 1,30 \times \mathrm{D} = 1,30 \times 46,90$ € $= 60,97$ €.

On constate que le prix final est plus bas que le prix initial. L'augmentation de 30 % ne suffit pas à remonter jusqu'au prix initial.

De manière plus littérale on a : $\mathrm{A} = 1,30 \times \mathrm{D} = 1,30 \times 0,70 \times \mathrm{P}$ or $1,30 \times 0,70 = 0,91$. Ainsi $\mathrm{A} = 0,91 \times \mathrm{P}$.

Comme $0,91 = 1-0,09$ car $1-0,91 = 0,09$, on a $0,91 = 1-\dfrac{9}{100}$. Il s'agit d'un baisse de 9 %.

On peut se demander quel pourcentage d'augmentation aurait permis de remonter au prix initial. Cela revient à résoudre l'équation suivante dont l'inconnue est k :

$$\begin{aligned} 0,70 \times k \times \mathrm{P} &= \mathrm{P} \\ 0,70 \times k &= 1 \\ k &= \frac{1}{0,70} \\ k &\approx 1,43 \end{aligned}$$

Comme $1,43 = 1+\dfrac{43}{100}$, il aurait fallu augmenter le prix de 43 %.

La fonction linéaire

a un nombre quelconque fixé.

La fonction linéaire de coefficient a est définie ainsi :

$$f : x \to f(x) = ax$$

Exemples :

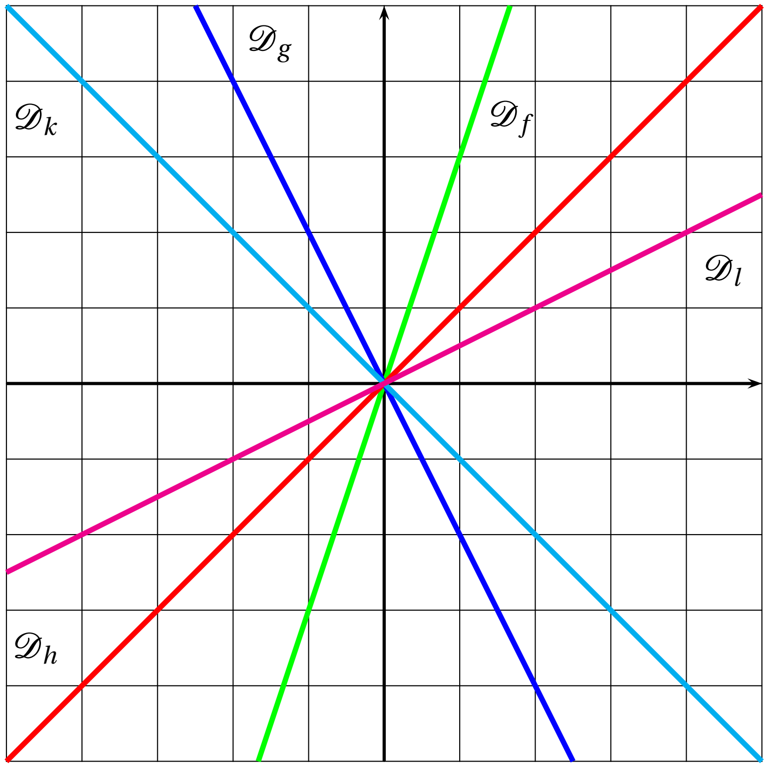
- $f(x) = 3x$ est la fonction linéaire de coefficient 3 ;
- $g(x) = -2x$ est la fonction linéaire de coefficient -2 ;
- $h(x) = x$ est la fonction linéaire de coefficient 1 ;
- $k(x) = -x$ est la fonction linéaire de coefficient -1 ;
- $l(x) = \dfrac{x}{2}$ est la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{2}$;
- $m(x) = 0$ est la fonction linéaire de coefficient 0 ;

Propriétés de la fonction linéaire

Le tableau de valeurs d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité dont le coefficient est celui de la fonction.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Exemples :



$\mathscr{D}_g$
$\mathscr{D}_k$
$\mathscr{D}_f$
$\mathscr{D}_l$
$\mathscr{D}_h$