
MÉTHODE 6.1 : Effectuer une diminution ou une augmentation en pourcentage

Un livret d'épargne rémunère les dépôts de 1,5 % par an. On dépose 5000 € sur ce livret. De quelle montant dispose-t-on au bout d'un an? de deux ans? de dix ans?

Augmenter de 1,5 % revient à multiplier par $1 + \frac{1,5}{100} = 1 + 0,015 = 1,015$

Au bout d'un an il y aura : $5000 \text{ €} \times 1,015 = 5075 \text{ €}$.

Au bout de deux ans on aura : $5075 \text{ €} \times 1,015 = 5151,125 \text{ €}$ soit $5000 \text{ €} \times 1,015 \times 1,015 = 5000 \text{ €} \times 1,015^2$

Au bout de dix ans on aura : $5000 \text{ €} \times \underbrace{1,015 \times 1,015 \times \dots \times 1,015}_{10 \text{ fois}} = 5000 \text{ €} \times 1,015^{10} = 5802,704 \text{ €}$.

MÉTHODE 6.2 : Déterminer une augmentation ou une diminution en pourcentage

Un prix est passé de 75 € à 57 €. Quel est le pourcentage de diminution?

Il faut chercher le coefficient multiplicateur k tel que $75 \times k = 57$

Ainsi $k = \frac{57}{75} = 0,76$.

Or $0,76 = 1 - 0,24 = 1 - \frac{24}{100}$. On peut remarquer que $76 \% + 24 \% = 100 \%!$

Il s'agit d'une diminution de 24 %.

II — La fonction linéaire

🔗 DÉFINITION 6.1 : La fonction linéaire

On choisit a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est définie ainsi :

$$f : x \rightarrow a \times x$$

La fonction linéaire de coefficient a modélise le programme de calcul suivant :

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">— Choisir un nombre;— Le multiplier par a;— Écrire le résultat. |
|--|

EXEMPLES : $f(x) = 5x$ – la fonction linéaire de coefficient 5 $g(x) = x$ – la fonction linéaire de coefficient 1 car $x = 1 \times x$ $h(x) = -x$ – la fonction linéaire de coefficient -1 car $-x = -1 \times x$ $k(x) = -3x$ – la fonction linéaire de coefficient 3 $l(x) = \frac{x}{5}$ – la fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{5}$ car $\frac{x}{5} = \frac{1}{5} \times x$ $m(x) = 3x + 6$ – ce n'est pas une fonction linéaire à cause du $+6$ $p(x) = 4x^2$ – ce n'est pas une fonction linéaire à cause du x^2 $t(x) = \frac{1}{x}$ – ce n'est pas une fonction linéaire**🌀 PROPRIÉTÉ 6.2 : Fonction linéaire et proportionnalité**

Les images et les antécédents par une fonction linéaire sont proportionnels.

Le coefficient de proportionnalité correspond au coefficient de la fonction linéaire.

🌀 DÉMONSTRATION : a un nombre et f la fonction linéaire de coefficient a .Pour un nombre x quelconque, son image est $f(x) = ax$. On constate que $\frac{f(x)}{x} = \frac{ax}{x} = a$ Cela prouve que x et $f(x)$ sont proportionnels.

CQFD

EXEMPLE :Soit g la fonction linéaire de coefficient $-3,25$.

Dressons un tableau de valeurs de cette fonction.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	13	9,75	6,5	3,25	0	-3,25	-6,5	-9,75	-13

Ce tableau est bien un tableau de proportionnalité de coefficient $-3,25$.**MÉTHODE 6.3 : Déterminer une fonction linéaire connaissant un nombre et son image**Soit f une fonction linéaire telle que $f(3) = -2$.Il faut déterminer le coefficient a de cette fonction.Comme pour tout x on a $f(x) = ax$ or $f(3) = -2$, on en déduit que $a \times 3 = -2$ d'où $a = -\frac{2}{3}$ Il s'agit de la fonction linéaire de coefficient $-\frac{2}{3}$.

🌀 PROPRIÉTÉ 6.3 :

Si f est une fonction linéaire alors $f(0) = 0$

🌀 DÉMONSTRATION :

f la fonction linéaire de coefficient a donc pour tout nombre x on a $f(x) = ax$

Ainsi $f(0) = a \times 0 = 0$

CQFD

🌀 PROPRIÉTÉ 6.4 : Fonction linéaire et représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

🌀 DÉMONSTRATION :

a un nombre quelconque et x_1 et x_2 deux nombres quelconques différents.

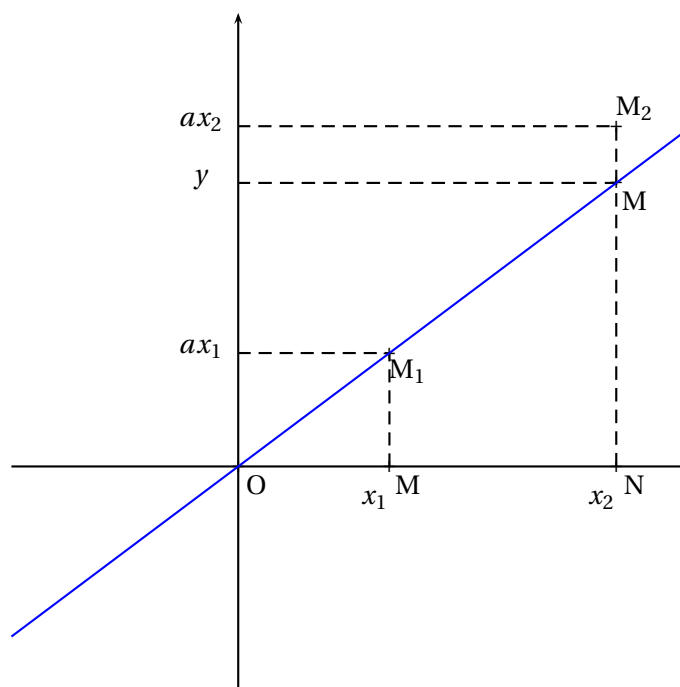
Nous pouvons commencer par traiter le cas où x_1 et x_2 sont positifs.

Considérons les points $O(0;0)$, $M_1(x_1, ax_1)$ et $M_2(x_2, ax_2)$.

O , M_1 et M_2 sont trois points distincts de la représentation graphique de la fonction linéaire de coefficient a , $f(x) = ax$.

Nous allons montrer que ces points sont alignés.

Considérons la droite (OM_1) et un point $M(x_2; y_2)$ de la droite (OM_1) d'abscisse x_2 . Nous allons prouver que $y_2 = ax_2$.



Dans le triangle OMN , comme les droites (MM_1) et (NN_1) sont perpendiculaires à l'axe des abscisses, elles sont parallèles entre elles.

Nous pouvons donc utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{ON}{ON_1} = \frac{MM_1}{NN_1}$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{ON}{ON_1} = \frac{ax_1}{y}$$

Ainsi comme $\frac{x_1}{x_2} = \frac{ax_1}{y}$ on a $y = \frac{x_2 \times ax_1}{x_1} = ax_2$

Ainsi le point M a pour coordonnées $M(x_1; ax_1)$, il s'agit du point M_1 .

Cela prouve que deux points quelconques, M_1 et M_2 , de la représentation graphique de la fonction linéaire, $f(x) = ax$, sont alignés avec l'origine du repère.

Si x_1 et x_2 sont négatifs, on peut effectuer une symétrie de centre O pour obtenir deux points M'_1 et M'_2 dont les abscisses sont positives. Ces points sont donc alignés avec l'origine d'après la première partie. Or par propriété de la symétrie centrale, O, M_1 et M'_1 sont alignés ainsi que O, M_2 et M'_2 . Finalement O, M_1 et M_2 sont bien alignés.

Si x_1 ou x_2 est négatif, on raisonne de la même manière avec un seul symétrique.

CQFD
