MÉTHODE 6 . 1 : Effectuer une diminution ou une augmentation en pourcentage
Un livret d'épargne rémunère les dépôts de $1,5$ % par an. On dépose $5\,000$ €sur ce livret.
De quelle montant dispose t-on au bout d'un an ? de deux ans ? de dix ans ?

Augmenter de $1,5$ % revient à multiplier par $1+\dfrac{1,5}{100}=1+0,015=1,015$

Au bout d'un an il y aura : 5000 € $\times 1,015=5075$ €.

Au bout de deux ans on aura : 5075 € $\times 1,015=5\,151,125$ € soit 5000 € $\times 1,015\times 1,015=5000$ € $\times 1,015^2$

Au bout de dix ans on aura : 5000 € $\times \underbrace{1,015\times 1,015\times \ldots\times 1,015}_{\text{10 fois}}=5000$ € $\times 1,015^{10}=5\,802,704$ €.

MÉTHODE 6 . 2 : Déterminer une augmentation ou une diminution en pourcentage
Un prix est passé de 75 € à 57 €. Quel est le pourcentage de diminution ?

Il faut chercher le coefficient multiplicateur k tel que $75\times k=57$

Ainsi $k=\dfrac{57}{75}=0,76$.

Or $0,76=1-0,24=1-\dfrac{24}{100}$. On peut remarquer que $76\ \%+24\ \%=100\ \%$!
Il s'agit d'une diminution de 24 %.

II — La fonction linéaire

DÉFINITION 6.1 : La fonction linéaire

On choisit a un nombre quelconque.
La **fonction linéaire** de coefficient a est définie ainsi :

$$f : x \rightarrow a\times x$$

La fonction linéaire de coefficient a modélise le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre ;
- Le multiplier par a ;
- Écrire le résultat.

EXEMPLES :

$f(x) = 5x$	– la fonction linéaire de coefficient 5
$g(x) = x$	– la fonction linéaire de coefficient 1 car $x = 1 \times x$
$h(x) = -x$	– la fonction linéaire de coefficient -1 car $-x = -1 \times x$
$k(x) = -3x$	– la fonction linéaire de coefficient 3
$l(x) = \dfrac{x}{5}$	– la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{5}$ car $\dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{5} \times x$
$m(x) = 3x + 6$	– ce n'est pas une fonction linéaire à cause du $+6$
$p(x) = 4x^2$	– ce n'est pas une fonction linéaire à cause du x^2
$t(x) = \dfrac{1}{x}$	– ce n'est pas une fonction linéaire

PROPRIÉTÉ 6.2 : Fonction linéaire et proportionnalité

Les images et les antécédents par une fonction linéaire sont proportionnels.
Le coefficient de proportionnalité correspond au coefficient de la fonction linéaire.

DÉMONSTRATION :

a un nombre et f la fonction linéaire de coefficient a.
Pour un nombre x quelconque, son image est $f(x) = ax$. On constate que $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{ax}{x} = a$
Cela prouve que x et $f(x)$ sont proportionnels.

CQFD

EXEMPLE :
Soit g la fonction linéaire de coefficient $-3,25$.
Dressons un tableau de valeurs de cette fonction.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	13	9,75	6,5	3,25	0	-3,25	-6,5	-9,75	-13

Ce tableau est bien un tableau de proportionnalité de coefficient $-3,25$.

MÉTHODE 6 . 3 : Déterminer une fonction linéaire connaissant un nombre et son image
Soit f une fonction linéaire telle que $f(3) = -2$.

Il faut déterminer le coefficient a de cette fonction.
Comme pour tout x on a $f(x) = ax$ or $f(3) = -2$, on en déduit que $a \times 3 = -2$ d'où $a = -\dfrac{2}{3}$

Il s'agit de la fonction linéaire de coefficient $-\dfrac{2}{3}$.

PROPRIÉTÉ 6.3 :

Si f est une fonction linéaire alors $f(0) = 0$

DÉMONSTRATION :

f la fonction linéaire de coefficient a donc pour tout nombre x on a $f(x) = ax$
Ainsi $f(0) = a \times 0 = 0$

CQFD

PROPRIÉTÉ 6.4 : Fonction linéaire et représentation graphique

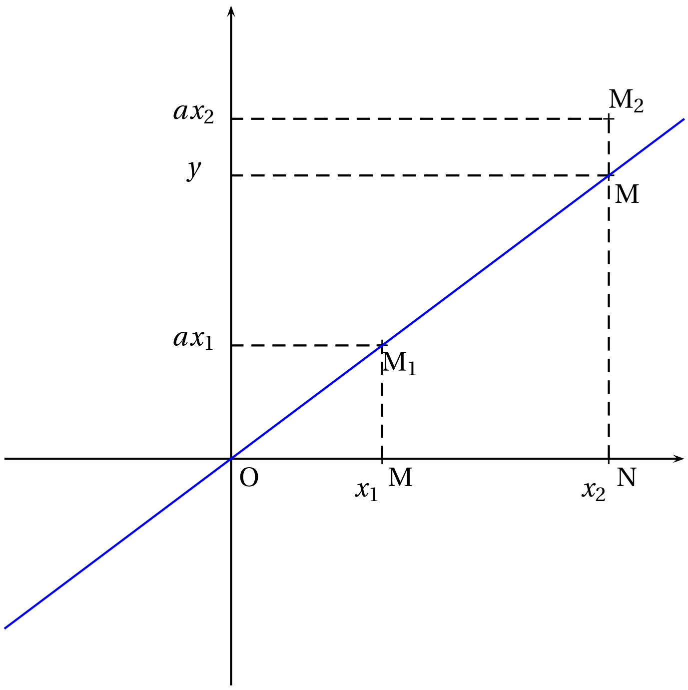
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

DÉMONSTRATION :

a un nombre quelconque et x_1 et x_2 deux nombres quelconques différents.
Nous pouvons commencer par traiter le cas où x_1 et x_2 sont positifs.

Considérons les points $O(0;0)$, $M_1(x_1, ax_1)$ et $M_2(x_2; ax_2)$.
O, M_1 et M_2 sont trois points distincts de la représentation graphique de la fonctions linéaire de coefficient a, $f(x) = ax$.
Nous allons montrer que ces points sont alignés.

Considérons la droite (OM_1) et un point $M(x_2; y_2)$ de la droite $(0M_1)$ d'abscisse x_2. Nous allons prouver que $y_2 = ax_2$.



Dans le triangle OMN, comme les droites (MM_1) et (NN_1) sont perpendiculaires à l'axe des abscisses, elles sont parallèles entre elles.
Nous pouvons donc utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{ON}{ON_1} = \frac{MM_1}{NN_1}$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{ON}{ON_1} = \frac{ax_1}{y}$$

Ainsi comme $\frac{x_1}{x_2} = \frac{ax_1}{y}$ on a $y = \frac{x_2 \times ax_1}{x_1} = ax_2$

Ainsi le point M a pour coordonnées $M(x_1; ax_1)$, il s'agit du point M_1.

Cela prouve que deux points quelconques, M_1 et M_2, de la représentation graphique de la fonction linéaire, $f(x) = ax$, sont alignés avec l'origine du repère.

Si x_1 et x_2 sont négatifs, on peut effectuer une symétrie de centre O pour obtenir deux points M_1' et M_2' dont les abscisses sont positives. Ces points sont donc alignés avec l'origine d'après la première partie. Or par propriété de la symétrie centrale, O, M_1 et $M'1$ sont alignés ainsi que 0, M_2 et M_2'. Finalement O, M_1 et M_2 sont bien alignés.

Si x_1 ou x_2 est négatif, on raisonne de la même manière avec un seul symétrique.

CQFD
