# CHAPITRE VII

## Les probabilités

TOUS le reste

### JACQUES BERNOULLI

*(1654-1705)*

Suisse

Jacques Bernoulli est issu d'une famille de riches commerçants. Il commence par étudier la philosophie à l'université avant de s'intéresser à la physique, l'astronomie et les mathématiques. En 1678, il voyage à travers l'Europe où il va rencontrer les plus grands scientiques de son temps.

Ses premièrs travaux datent de 1685 et concernent la logique, l'algèbre et les probabilités. En 1689 il conjecture la loi des grands nombres : c'est la loi qui permet d'affirmer qu'une probabilité est une fréquence de réalisation d'un événement répété de très nombreuses fois. Ce principe permet de justifier la méthode des sondages. En 1690 il fait une avancée sérieuse sur les équations différentielles. Il est le premier à utiliser le mot intégrale dans ses écrits. Il découvre aussi la constante $e$ qui portera plus tard le nom de constante d'Euler. Jusqu'à sa mort en 1705, il fait progresser la théorie naissante des probabilités. Il démontre la loi des grands nombres et met en place l'usage pratique de ce domaine en particulier dans le domaine du partage des héritages.

Il meurt prématurément à l'âge de 50 ans. On l'enterre à Bâle avec tous les honneurs. Une loi de probabilité porte son nom : la loi de Bernoulli et les processus de Bernoulli qui permettent à l'aide de la loi de binomiale de calculer par exemple la probabilité d'obtenir dix fois piles à la suite quand on lance dix fois une pièce de monnaie.

**Plan du cours :**

a

**Programme (*BO nº 30 du 26-7-2018*) :**

— a

**Compétences :**

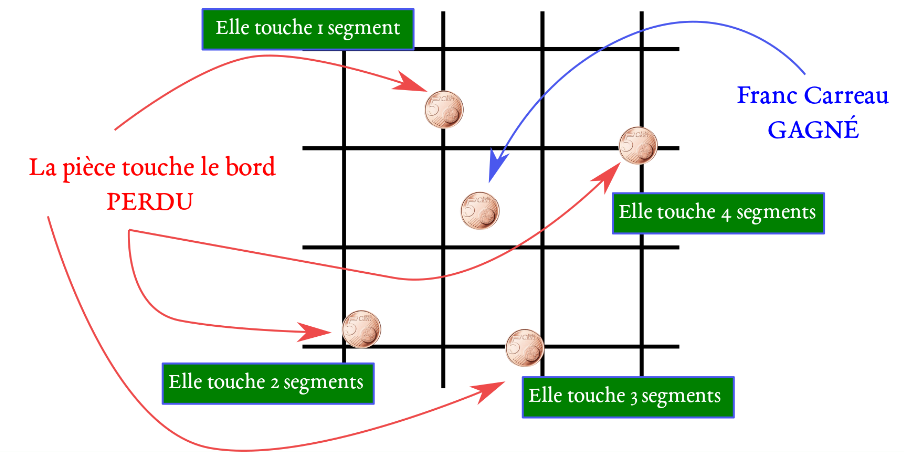
— a

**SITUATION INITIALE : Je jeu du franc carreau**

Georges-Louis Leclerc comte de Buffon (1707-1788) est un naturaliste, biologiste, mathématicien, cosmologiste, philosophe et écrivain français. En 1778 il propose un jeu particulièrement intéressant : le jeu du Franc carreau. Voici le texte original :

*« Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les séparent; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande les sorts de chacun de ces joueurs. »*

Nous allons jouer ensemble avec un pièce de 5 centimes d'euro et d'un quadrillage carré dont les carreaux mesurent 6 $cm$. Voici ce qui peut se passer :




**1.** Tracer ce quadrillage avec des carreaux carrés de 6 $cm$ sur une feuille. Munissez-vous d'une pièce de 5 centimes et expérimentez cette situation. De manière pratique vous pouvez placer votre feuille au fond d'un boite de chaussures pour que la pièce ne sorte pas de du quadrillage.
Je vous propose de lancer la pièce plusieurs fois (au moins 20 fois... 100 fois... ) et de noter les résultats de votre expérience. Vous pouvez par exemple compléter le tableau suivant :

| | Franc Carreau GAGNÉ | 1 segment PERDU | 2 segments PERDU | 3 segments PERDU | 4 segments PERDU | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | | | | | | |
| Fréquence | | | | | | |

**Rappel :** L'effectif désigne tout simplement le nombre de cas observé. La fréquence est le quotient du nombre de cas observé sur le nombre total de lancers. La fréquence peut s'exprimer sous forme décimale ou sous forme de pourcentage.

**2.** Je vous propose maintenant de jouer contre moi à ce jeu. La partie coûte 2 euros. Si vous faites un Franc Carreau vous gagnez 4 euros. Sinon vous perdez vos 2 euros.
Jouez-vous à ce jeu? Expliquez votre choix.

**3.** Avant de jouer à ce jeu je vous autorise à vous entrainer à lancer cette pièce avant de jouer.
Acceptez-vous maintenant de jouer? Expliquer votre choix.

**4.** Vous avez joué cinq fois avec moi et cinq fois de suite vous avez gagné en faisant Franc-Carreau.
Acceptez-vous de jouer une sixième fois? Expliquer votre choix.

Consulter la simulation Scratch qui correspond à cette expérience.

## I — Vocabulaire des probabilités

**❧ DÉFINITION 7.1 : Expérience aléatoire**

Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont le résultat est soumis au hasard.
À chaque répétition dans les mêmes conditions de cette expérience, le résultat n'est pas forcément le même.

**EXEMPLES :**

**Expérience n° 1 :** on lance une pièce de monnaie équilibrée.

**Expérience n° 2 :** on lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

**Expérience n° 3 :** on lance une pièce de 5 centimes d'euros sur un quadrillage.

**Expérience n° 4 :** on pioche deux fois de suite sans remise une boule dans une urne contenant 2 boules vertes, 3 boules noires et 1 boule blanche.

**Expérience n° 5 :** on lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

**Expérience n° 6 :** deux personnes jouent à Chifoumi (Pierre – Papier – Ciseaux).

**❧ DÉFINITION 7.2 : Issues possibles et événements**

Les résultats élémentaires d'une expérience aléatoire sont les **issues possibles** de l'expérience.
On dit parfois que l'ensemble de ces issues forme **l'univers** des possibles.

Après une expérience aléatoire, un **événement** est ensemble constitué d'une partie des issues possibles.

Un événement ou une issue sont le plus souvent décrits par une phrase.

**EXEMPLES :**

**Expérience n° 1 :** les issues possibles sont « obtenir Pile »et « obtenir Face ».
On peut noter P l'événement « obtenir Pile »et F l'événement « obtenir Face ».

**Expérience n° 2 :** il y a 6 issues possibles : obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
On peut étudier de nombreux événements comme A l'événement « obtenir 5 », B l'évenement « obtenir un nombre premier », C l'événement « obtenir un multiple de 3 », D l'événement « obtenir un nombre pair »et E « obtenir un nombre impair ».
L'événement A est constitué d'une seule issue : 1.
L'événement B est constitué de trois issues : 2, 3 et 5.
L'événement C est constitué de deux issues : 3 et 6.
L'événement D est constitué des trois issues : 2, 4 et 6.
L'événement E est constitué des trois issues : 1, 3 et 5.

**Expérience n° 3 :** il y a deux issues possibles : faire « franc-carreau »ou « toucher une ligne ».
L'événement F est « gagner en faisant franc-carreau ».
L'événement L est « perdre en touchant une ligne ».

**Expérience n° 4 :** il y a de nombreuses issues comme « obtenir un boule blanche puis obtenir une boule verte ».
Voici quelques événements :
L'événement M « obtenir deux boules de la même couleur », l'événement N « obtenir deux boules de couleurs différentes »ou encore O « obtenir une boule blanche et une boule verte ».

**Expérience n° 5 :** il y a de nombreuses issues comme « 6 et 2 », « 2 et 2 »...
On peut considérer certains événements :
Q : « la somme des deux dés est égale à 7 ».
R : « la somme des deux dés est égale à 12 ».
S : « la somme des deux dés est égale à 1 ».
T : « la somme des deux dés est inférieure à 13 ».

**Expérience n° 6 :** il y a de nombreuses issues comme « Pierre-Pierre », « Feuille-Ciseaux », « Ciseaux-Pierre », ...
L'ordre a de l'importance, il correspond à chacun des joueurs.
On peut considérer certains événements :
U : « le premier joueur gagne ».
V : « il y a égalité ».
W : « le premier joueur perd ».

❧ **DÉFINITION 7.3 : Événements contraire**

Deux événement sont **contraires** l'un de l'autre si en rassemblant les issues de chacun des deux événements on obtient toutes les issues possibles.

**EXEMPLES :**

**Expérience n° 2 :** les événements D et E sont contraires l'un de l'autre. Ne pas être pair c'est être impair.

**Expérience n° 3 :** les événements F et L sont contraires l'un de l'autre. Le contraire de gagner c'est perdre !

**Expérience n° 6 :** les événements U et W ne sont pas contraires car il faut tenir compte de l'égalité.

## II — Fréquences et probabilités

❧ **DÉFINITION 7.4 : Probabilité d'un événement**

La **probabilité** d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la fréquence de réalisation de l'événement c'est à dire « la chance »de réalisation de cet événement.
Un événement dont la probabilité est 1 se réalise toujours.
Un événement dont la probabilité est 0 ne se réalise jamais.

**THÉORÈME 7.1 : Stabilisation des fréquences** Admis

En répétant dans les mêmes conditions une expérience aléatoire la fréquence d'apparition de chaque issue tend à se stabiliser vers une valeur unique comprise entre 0 et 1.
Cette valeur unique est égale à la probabilité de l'événement constitué par cette issue.

**EXEMPLES :**

**Expérience n° 1 :** en lançant de très nombreuses fois une pièce de monnaie, les fréquences d'apparition de Pile et de Face tendent à s'approcher de $\frac{1}{2} = 0,5$ soit 50 % c'est à dire une chance sur deux!
Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/141607450/

**Expérience n° 2 :** en lançant de très nombreuses fois un dé à six faces les fréquences d'apparition de chaque face tendent à s'approcher de $\frac{1}{6} \approx 0,17$ soit environ 17 % c'est une chance sur six!
Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/141712015/

**Expérience n° 3 :** en lançant une pièce de très nombreuse fois sur le quadrillage on constate que l'événement Gagner se réalise dans environ 40 % des cas et l'événement Perdre dans 60 % des cas.
Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/378552453/

**Expérience n° 5 :** en répétant de très nombreuses fois l'expérience et en effectuant la somme des dès on constate que les fréquences se stabilisent.
Consulter pour vous convaincre cette simulation numérique avec Scratch. https://scratch.mit.edu/projects/14171022/

## III — L'équiprobabilité

**PROPRIÉTÉ 7.1 : L'équiprobabilité** Admise

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire se réalisent avec la même probabilité on dit c'est une situation **d'équiprobabilité** .
Dans ce cas la probabilité d'un événement se calcule de la manière suivante :

$$\frac{\text{nombre d'issues réalisant l'événement}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

**EXEMPLES :**

**Expérience n° 1 :** comme la pièce est équilibrée nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
Il y a 2 issues possibles : Pile et Face.
L'événement P est constitué d'une issue : la probabilité d'obtenir Pile est donc $\frac{1}{2} = 0,50$ soit 50 %.

L'événement F est constitué d'une issue : la probabilité d'obtenir Face est donc $\frac{1}{2} = 0,50$ soit 50 %.

P et F sont deux événements contraires et on remarque que la somme de leurs probabilités est égale à 1.

**Expérience n° 2 :** comme le dé est équilibré nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
Il y a 6 issues possibles.
L'événement A est constitué d'une seule issue : sa probabilité est $\frac{1}{6} \approx 0,17$ soit environ 17 %.

L'événement B est constitué de 3 issues : sa probabilité est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$ soit environ 50 %.

L'événement C est constitué de 2 issues : sa probabilité est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit environ 33 %

Les événements D et E sont aussi chacun constitué de 3 issues : leurs probabilités sont 0,5 ou 50 %.

On remarque à nouveau que D et E sont contraires et que la somme de leurs probabilités vaut 1.

**REMARQUE :**
**Expérience n° 3 :** les deux issues possibles ne sont pas équiprobables. En utilisant les fréquences d'apparition avec on peut avoir une valeur approchée du résultat. Voir en annexe.

**Expériences n° 4 et n° 5 :** il s'agit d'expérience aléatoire à deux épreuves, on verra plus tard une méthode de calcul.

## IV — Expérience aléatoire à deux épreuves

**❧ DÉFINITION 7.5 :**

Une expérience aléatoire est dite à **deux épreuves** lorsqu'elle est constituée de deux expériences aléatoires consécutives.
Ces deux expériences aléatoires peuvent être indépendantes l'une de l'autre, mais ce n'est pas toujours le cas.

**EXEMPLES :**

**Expérience 4 :** c'est une expérience aléatoire à deux épreuves. Les deux épreuves ne sont pas indépendantes puisque la boule choisie lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne ensuite.

**Expérience 5 :** c'est aussi une expérience aléatoire à deux épreuves. Chaque lancer de dé est une expérience aléatoire indépendante de l'autre.

**Expérience 6 :** une autre expérience aléatoire à deux épreuves. Chaque joueur correspond à une expérience aléatoire indépendante de l'autre joueur.

**MÉTHODE 7 . 1 : Modéliser une expérience aléatoire à deux épreuves**
Pour faire la liste des issues possibles équiprobables d'une expérience aléatoire à deux épreuves on peut les représenter sous forme d'un tableau ou d'un arbre.
Il faut veiller à ce que les issues dont on fait la liste soient bien équiprobables !

**Exemples :**

**Expérience n° 5 :** On pourrait se dire que les issues sont les différentes sommes possibles avec deux dès cubiques. Ces issues sont : 2, 3, 4, ..., 12.

Elles ne sont cependant pas équiprobables car une seule combinaison donne 12 : $6+6$ alors que pour obtenir 4 il y a plusieurs possibilités : $1+3$, $2+2$, $3+1$...

On peut modéliser cette expérience sous forme du tableau suivant :

| **Somme** | | Premier dé | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| Second dé | **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | **2** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | **4** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | **6** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Il y a donc 36 issues équiprobables !

L'événement Q : « la somme est égale à 7 » a pour probabilité : $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}\approx 0,17$ soit environ 17 %.

En effet la somme 7 apparaît 6 fois dans le tableau.

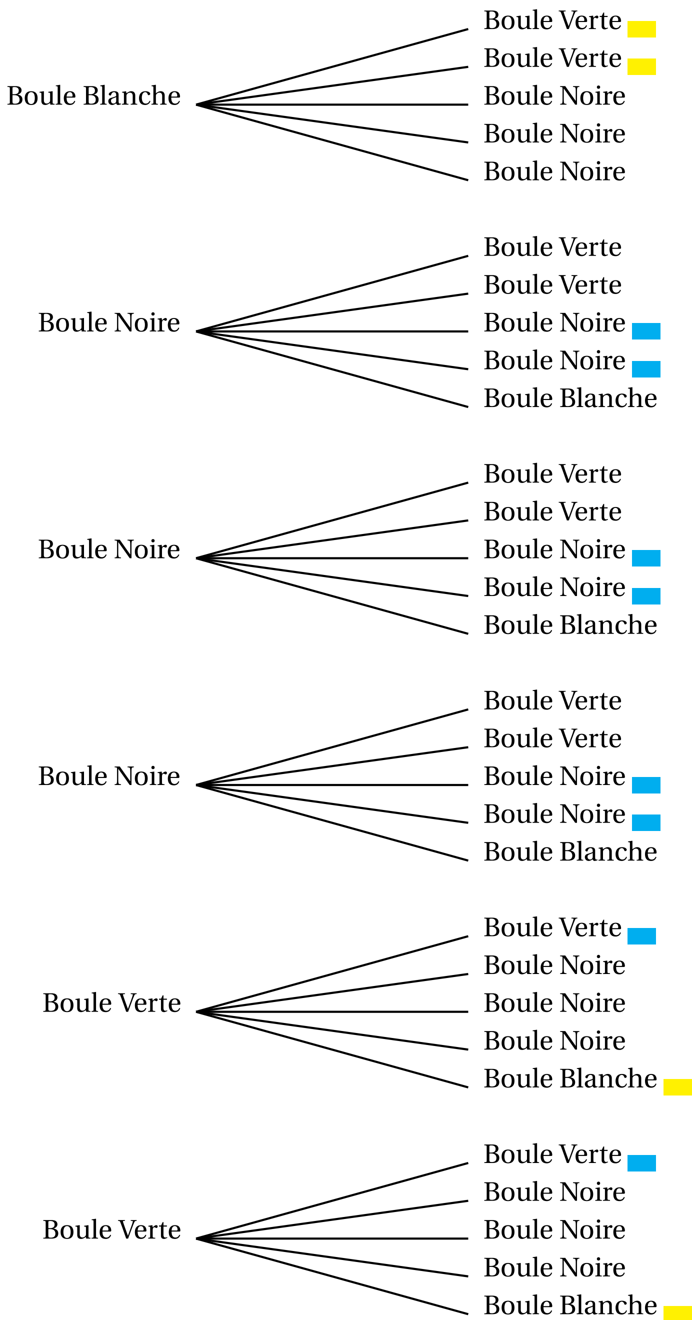
L'événement R : « la somme est égale à 12 » a pour probabilité : $\dfrac{1}{36}\approx 0,03$ soit environ 3 %.

En effet la somme 12 apparaît une seule fois dans le tableau.

L'événement S : « la somme est égale à 1 » n'apparaît pas dans le tableau, cet événement est impossible, sa probabilité vaut 0.

L'événement T : « la somme est inférieure à 12 » se réalise pour toutes les cases du tableau, cet événement se réalise toujours, sa probabilité vaut 1.

**Expérience n° 4 :** Il y a six boules dans l'urne lors du premier tirage puis seulement cinq lors du second tirage. Cette situation se prête à la modélisation des issues sous forme d'un arbre.




C'est un arbre ayant 30 branches équiprobables.
L'événement M « obtenir deux boules de la même couleur »correspond à 9 branches de cet arbre.

La probabilité de l'événement M est donc $\dfrac{9}{30} = 0,3$ soit 30 %.

L'événement N « obtenir deux boules de couleurs différentes »est le contraire de l'événement M.

Sa probabilité est donc 70 % soit $\dfrac{21}{30} = \dfrac{7}{10}$ : ce sont les 21 branches restantes !

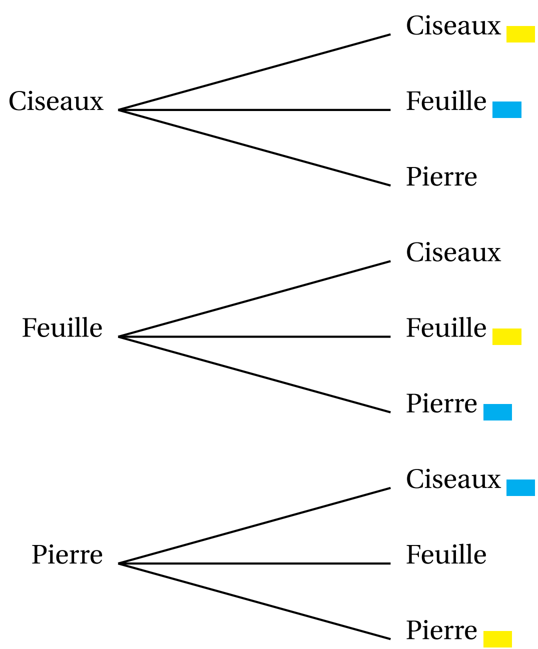
L'événement O « obtenir une boule blanche et une boule verte »correspond à 4 branches de cet arbre.

La probabilité de l'événement O est donc $\dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15} \approx 0,13$ soit 13 %

**Expérience n° 6 :** il y a 3 issues pour chaque joueur.
On rappelle que la Pierre gagne face aux Ciseaux (elle casse les ciseaux), la Feuille face à la Pierre (la feuille enveloppe la pierre), le Ciseaux face à la Feuille (les ciseaux coupent la feuille).

On peut au choix se servir d'un tableau ou d'un arbre.

| **Chifoumi** | | Premier Joueur | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **Pierre** | **Feuille** | **Ciseaux** |
| Second Joueur | **Pierre** | Pierre-Pierre | Feuille-Pierre | Ciseaux-Pierre |
| | **Feuille** | Pierre-Feuille | Feuille-Feuille | Ciseaux-Feuille |
| | **Ciseaux** | Pierre-Ciseaux | Feuille-Ciseaux | Ciseaux-Ciseaux |




Il y a donc 9 issues possibles.

L'événement U « le premier joueur gagne »correspond à 3 cases du tableau ou 3 branches de l'arbre.

La probabilité de l'événement U est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit 33 %.

L'événement V « il y a égalité »correspond à 3 cases du tableau ou 3 branches de l'arbre.

La probabilité de l'événement V est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit 33 %.

L'événement W n'est pas le contraire de l'événement U car il faut tenir compte de l'égalité ! Il reste 3 branches.

La probabilité de l'événement W est $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ soit 33 %.

# V — Annexes

## 1 Exercices

## Exercice n° 7.1 : **Une urne et des boules**

Une urne contient des boules indiscernables au toucher :
- 2 boules vertes ;
- 5 boules bleues ;
- 1 boules noires ;
- 4 boules blanches.

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

**1.** Quelle est la probabilité d'obtenir une boule bleue ?

**2.** Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

**3.** Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ou une boule bleue ?

**4.** Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une boule noire ?

## Exercice n° 7.2 : **Une urne et des boules alphabétiques**

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
Sur chaque boule est écrit une lettre.
En utilisant **toutes** les boules on peut former le plus long mot de la langue française :

**ANTICONSTITUTIONNELLEMENT**

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

**1.** Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre **T**.

**2.** Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle ?

**3.** Quelle est la probabilité d'obtenir une des lettres du mot **MATHEMATIQUES** ?

**4.** Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** ?

**5.** Quelle est la probabilité d'obtenir un **J** ?

## Exercice n° 7.1 : Une urne et des boules

Correction

L'expérience aléatoire consiste à choisir un boule indiscernable au toucher dans une urne contenant $2+5+1+4 = 12$ boules.
Comme elles sont indiscernables au toucher, nous pouvons dire que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

**1.** Il y a 5 boules bleues et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{12} \approx 0,42$ soit environ 42 %.

**2.** Il y a 4 boules blanches et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$ soit environ 33 %.

**3.** Il y a 2 boules vertes et 4 boules bleues. Il y a donc 6 boules sur 12 qui conviennent.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ soit environ 50 %.

**4.** Il y a 1 boule noire, il reste donc 11 boules non noires sur 12.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{11}{12} \approx 0,92$ soit environ 92 %.

## Exercice n° 7.2 : Une urne et des boules alphabétiques

Correction

L'expérience aléatoire consiste à choisir une boule sur lequel est écrit une lettre du mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** : il y a 25 lettres!
Comme les boules sont indiscernables au toucher, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

**1.** Il y a cinq T sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ soit 20 %.

**2.** Il y a dix voyelles sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

**3.** Les lettres communes entre **MATHEMATIQUES** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : A, T, E, I, U et S.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : un A, cinq T, trois E, trois I, un U et un S soit $1+5+3+3+1+1 = 14$ lettres communes avec **MATHEMATIQUES**.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{14}{25} = 0,56$ soit 56 %.

**4.** Le contraire de l'événement est « obtenir une lettre du mot **LOGIQUE**. »
Les lettres communes entre **LOGIQUE** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : L, O, I, U et E.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : deux L, deux O, trois I, un U, deux E soit $2+2+3+1+2 = 10$ lettres.

La probabilité d'obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** est donc : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

La probabilité du contraire est donc $\dfrac{3}{5} = 0,6$ soit 60 % car 40 % + 60 % = 100 %.

**5.** Il n'y a pas de J dans le mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT**.

La probabilité cherchée est 0 %.

## 2 Évaluations

# Évaluation de mathématiques

**Exercice 1** : On pose $f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

**1.** Développer et réduire $f(x)$ et montrer que $f(x) = 5x^2 - 53x + 30$

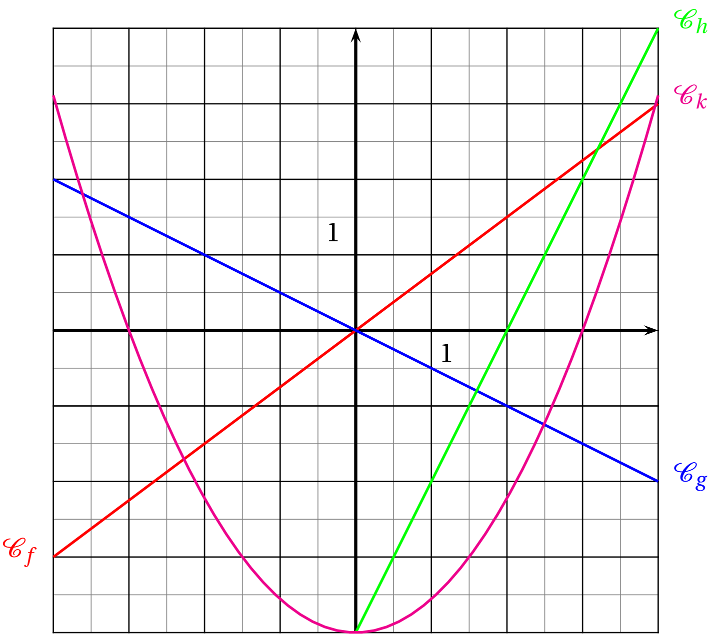
**2.** Calculer en détaillant vos calculs $f(0)$ et $f(-1)$.

**3.a.** En utilisant la forme développée, résoudre l'équation $f(x) = 30$.
**3.b.** Quels sont les antécédents de 30 par la fonction $f$ ?

**4.** Montrer que $f(x) = (5x-3)(x-10)$

**5.a.** Résoudre l'équation $(5x-3)(x-10) = 0$
**5.b.** Quels sont les antécédents de 0 par la fonction $f$ ?

**Exercice 2**




Ci-après sont tracées $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ les courbes représentatives des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$.

**1.** Lire sur le graphique sans justification :
$f(-4)$, $g(-2)$, $h(1)$ et $k(-3)$

**2.** Lire sur le graphique sans justification, le ou les antécédents de 0 pour chacune des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$.

**3.** Lesquels de ces fonctions sont linéaires, justifier votre réponse.

**4.** Même si les images suivantes n'apparaissent pas sur le graphique, calculer en justifiant votre réponse :
$f(10)$ et $g(50)$

**Exercice 3**
J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans le paquets que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisi sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

**1.** Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?
**2.** Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?
**3.** Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

**4.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?
**5.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?
**6.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

# Évaluation de mathématiques

Correction

**Exercice 1** : On pose $f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

**1.** Développer et réduire $f(x)$ et montrer que $f(x) = 5x^2 - 53x + 30$

$f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$
$f(x) = (25x^2 - 30x + 9) - (20x^2 + 35x - 12x - 21)$
Il faut séparer les deux parties de l'expression pour ne pas commettre d'erreur.
Pour développer $(5x-3)^2$ on peut écrire $(5x-3)(5x-3)$ et utiliser la méthode habituelle.
$f(x) = 25x^2 - 30x + 9 - 20x^2 - 35x + 12x + 21$
Attention aux changement de signe. Le moins devant la seconde parenthèse signifie « prendre l'opposé »de l'expression entre parenthèse.
$\boxed{f(x) = 5x^2 - 53x + 30}$

**2.** Calculer en détaillant vos calculs $f(0)$ et $f(-1)$.

Il suffit de remplace $x$ par 0 et par $-1$ en utilisant la forme développée : c'est plus rapide !
$f(0) = 5 \times 0^2 - 53 \times 0 + 30 = \boxed{30}$

$f(-1) = 5 \times (-1)^2 - 53 \times (-1) + 30$
Attention à $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$ et par $-1$ !!
$f(-1) = 5 \times 1 + 53 + 30 = \boxed{88}$

**3.a.** En utilisant la forme développée, résoudre l'équation $f(x) = 30$.

Il faut résoudre :

$$5x^2 - 53x + 30 = 30$$

$$5x^2 - 53x = 0$$

Quand on voit une équation avec un $x^2$ il faut penser à l'équation produit et donc essayer de factoriser !

$$5x \times x - 53 \times x = 0$$

$$x(5x-53) = 0$$

$x(5x-53)$ est bien la forme factorisée de $5x^2 - 53x$ il suffit de développer pour s'en rendre compte.

$$x(5x-53) = 0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul**
En clair, $x(5x-53)$ est le produit de $x$ par $5x-53$. Pour que ce produit soit égal à 0 il faut que l'un des deux facteurs soit nul. Nous allons donc résoudre deux équations.

| | |
|---|---|
| | $5x - 53 = 0$ |
| | $5x - 53 + 53 = 53$ |
| $x = 0$ | $5x = 53$ |

$$x = \frac{53}{5} = 10,6$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{0 \text{ et } \frac{53}{5}}$.

**3.b.** Quels sont les antécédents de 30 par la fonction $f$ ?

Les antécédents de 30 par $f$ sont les nombres $x$ tels que $f(x) = 30$, c'est à dire les nombres dont l'image est 30. Ce sont donc les solutions de l'équation précédente.

$\boxed{0 \text{ et } \frac{53}{5} \text{ sont les antécédents de 30 par } f.}$

**4.** Montrer que $f(x) = (5x-3)(x-10)$

On reconnaît une forme factorisée, on peut la développer pour démontrer le résultat.

$(5x-3)(x-10) = 5x^2 - 50x - 3x + 30 = 5x^2 - 53x + 30$

On obtient bien le résultat attendu !

On peut aussi tenter de factoriser l'expression de départ.

$f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

$f(x) = (5x-3)(5x-3) - (5x-3)(4x+7)$

$f(x) = (5x-3)[(5x-3) - (4x+7)]$

$f(x) = (5x-3)(5x-3-4x-7)$

$\boxed{f(x) = (5x-3)(x-10)}$

**5.a.** Résoudre l'équation $(5x-3)(x-10) = 0$

On reconnaît encore une forme factorisée.

$$(5x-3)(x-10) = 0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$5x - 3 = 0$$

$$5x - 3 + 3 = 3$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$x - 10 = 0$$

$$x - 10 + 10 = 10$$

$$x = 10$$

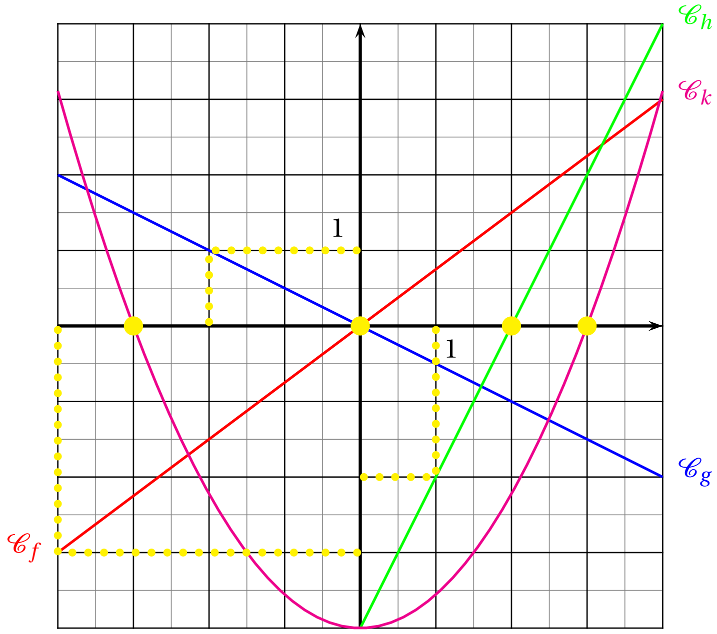
Il y a deux solutions : $\boxed{0,6 \text{ et } 10}$

**5.b.** Quels sont les antécédents de 0 par la fonction $f$ ?

Je joue une nouvelle fois avec le vocabulaire : les antécédents de 0 par $f$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } f \text{ sont } 0,6 \text{ et } 10.}$

**Exercice 2**




Ci-après sont tracées $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ les courbes représentatives des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$.

**1.** Lire sur le graphique sans justification :
$f(-4)$, $g(-2)$, $h(1)$ et $k(-3)$

$f$ est représentée graphiquement par la droite orange. Le point de cette droite ayant pour abscisse $-4$ a pour ordonnée $-3$.
Donc $\boxed{f(-4) = -3}$

$g$ est représentée graphiquement par la droite bleue. Le point de cette droite ayant pour abscisse $-2$ a pour ordonnée 1.
Donc $\boxed{g(-2) = 1}$

$h$ est représentée graphiquement par la droite verte. Le point de cette droite ayant pour abscisse 1 a pour ordonnée $-2$.
Donc $\boxed{h(1) = -2}$

$k$ est représentée graphiquement par la parabole (oui cela s'appelle comme cela!) rose. Le point de cette courbe ayant pour abscisse $-3$ a pour ordonnée 0.
Donc $\boxed{k(-3) = 0}$

**2.** Lire sur le graphique sans justification, le ou les antécédents de 0 pour chacune des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$.

Les antécédents de 0 pour chaque fonction correspondent aux abscisses des points d'intersection de chaque courbe avec l'axe des abscisses, en effet sur l'axe des abscisses les ordonnées sont égales 0.

La droite qui représente $f$ coupe l'axe des abscisses en $(0;0)$ donc $\boxed{\text{0 est l'antécédent de 0 par } f}$.

La droite qui représente $g$ coupe l'axe des abscisses en $(0;0)$ donc $\boxed{\text{0 est l'antécédent de 0 par } g}$.

La droite qui représente $h$ coupe l'axe des abscisses en $(2;0)$ donc $\boxed{\text{2 est l'antécédent de 0 par } h}$.

La parabole qui représente $k$ coupe l'axe des abscisses en $(-3;0)$ et $(3;0)$ donc $\boxed{-3 \text{ et } 3 \text{ sont les antécédents de 0 par } k}$.

**3.** Lesquels de ces fonctions sont linéaires, justifier votre réponse.

D'après le cours, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont linaires.}}$

**4.** Même si les images suivantes n'apparaissent pas sur le graphique, calculer en justifiant votre réponse :
$f(10)$ et $g(50)$

$f$ est linéaire. Donc il existe un nombre $a$ tel que pour tous les nombres $x$ on a $f(x) = a \times x$

Or nous avons vu que $f(-4) = -3$, nous pouvons donc calculer $a$.

$f(-4) = a \times -4 = -3$ donc $a = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$

Ainsi $f(x) = 0,75x$ d'où $\boxed{f(10) = 0,75 \times 10 = 7,5}$

De même $g(-2) = 1$ donc comme $g(x) = a \times x$ on a $a \times (-2) = 1$ d'où $a = \dfrac{1}{-2} = -0,5$

Ainsi $g(x) = -0,5x$ et $\boxed{g(50) = -0,5 \times 50 = -25}$

**Exercice 3**

J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans le paquets que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisi sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

**1.** Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?

L'expérience aléatoire considérée est à une épreuve, elle consiste choisir un bonbon sans regarder. Nous sommes donc dans un modèle d'équiprobabilité.

Il y a $1+1+1+2 = 5$ bonbons dans le paquets.

Deux bonbons sont mes préférés. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{5} = 0,4 \text{ soit } 40\%}$

**2.** Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?

Il y a un seul bonbon au réglisse. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{1}{5} = 0,2 \text{ soit } 20\%}$

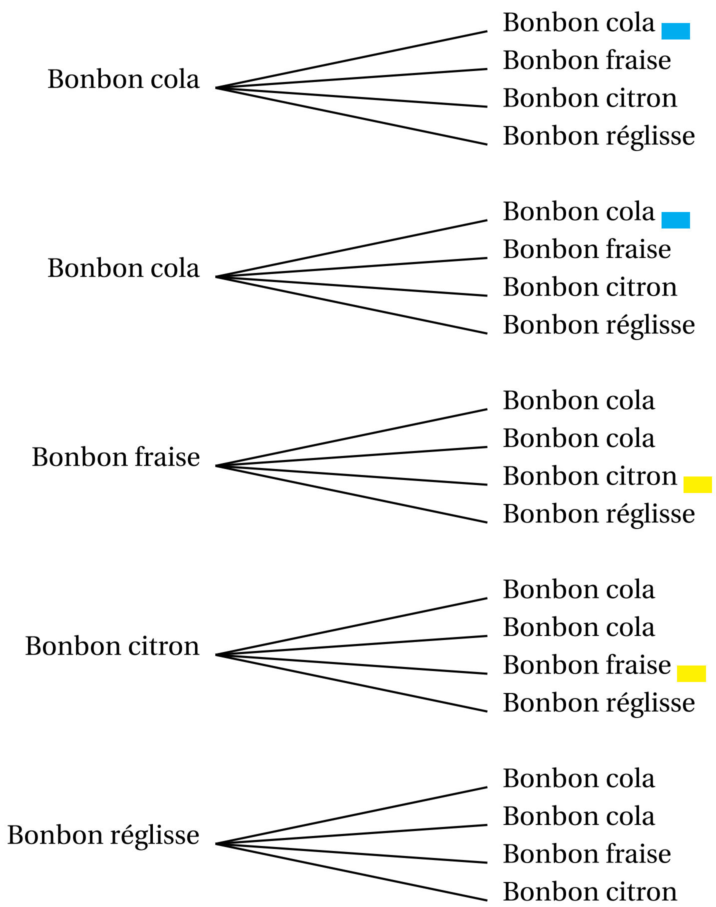
**3.** Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Deux bonbons sont au citron ou à la fraise. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{5} = 0,4 \text{ soit } 40\%}$

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

**4.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?

Nous sommes maintenant dans une expérience aléatoire à deux épreuves, nous pouvons la modéliser sous forme d'un arbre.




Il y a 20 branches équiprobables.

Deux branches correspondent à la question. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1 \text{ soit } 10\%}$.

**5.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?

C'est impossible puisqu'il n'y a qu'un bonbon réglisse. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est 0.}}$

**6.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

Deux branches correspondent à la question. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1 \text{ soit } 10\%}$.

# Pour rester en forme en mathématiques...

Voici une sélection d'exercices qui couvrent trois thèmes du programme de troisième.
Chaque thème est décliné en trois niveaux d'expertise :

— ❋— Maîtrise satisfaisante (le niveau attendu pour le Brevet) ;
— ❋❋— Très bonne maîtrise (le niveau recommandé pour le lycée général) ;
— ❋❋❋— Hors catégorie (pour les passionnés qui aiment se creuser la tête).

À vous d'essayer d'aller le plus loin possible !

## THÈME N° 1 : LE CALCUL LITTÉRAL

### **Première partie** — *Maîtrise satisfaisante* — ❋

**1.** Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$
$B(x) = (2-3x)(6-7x)$
$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$
$D(x) = (2x+3)^2$
$E(x) = (5x-3)^2-9$
$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

**2.** Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3)+(5x-1)(4x+5)$
$H(x) = (6x-1)(2x+9)-(2x-9)(6x-1)$
$I(x) = (5x-2)^2+(5x-2)(3x-1)$
$J(x) = (3x-1)^2-(6x+1)(3x-1)$

**3.** Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-2)(3x-1)=0$$
$$(6x-3)(1+7x)=0$$

### **Seconde partie** — *Très bonne maîtrise* — ❋❋

**1.** Factoriser les expressions suivantes :

$K(x) = x^2-9$
$L(x) = 25x^2-49$
$M(x) = (5x-1)^2-16$
$N(x) = (3x+7)^2-(4x-1)^2$

**2.** Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$
$$(4x-3)^2-(4x-3)(5x-1)=0$$
$$(3x-2)^2=25$$

### **Troisième partie** — *Hors catégorie* — ❋❋❋

On veut résoudre l'équation :

$$x^2-14x+24=0$$

Vous pouvez constater qu'on ne sait pas la résoudre directement ! On aimerait bien factoriser $x^2-14x+24$.

**1.** Développer $(x-7)^2$

**2.** Montrer que $x^2-14x+24=(x-7)^2-25$

**3.** Résoudre maintenant l'équation donnée au départ !

**Défi.** Pouvez-vous résoudre $x^2+8x-9=0$ en vous inspirant des trois questions précédentes !

## THÈME N° 2 : GÉOMÉTRIE

**Première partie** — *Maîtrise satisfaisante* — ✲

ABCD est un rectangle avec AB = 96 $mm$ et AD = 72 $mm$.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 $mm$.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

**1.** Réaliser la figure en vraies grandeurs.

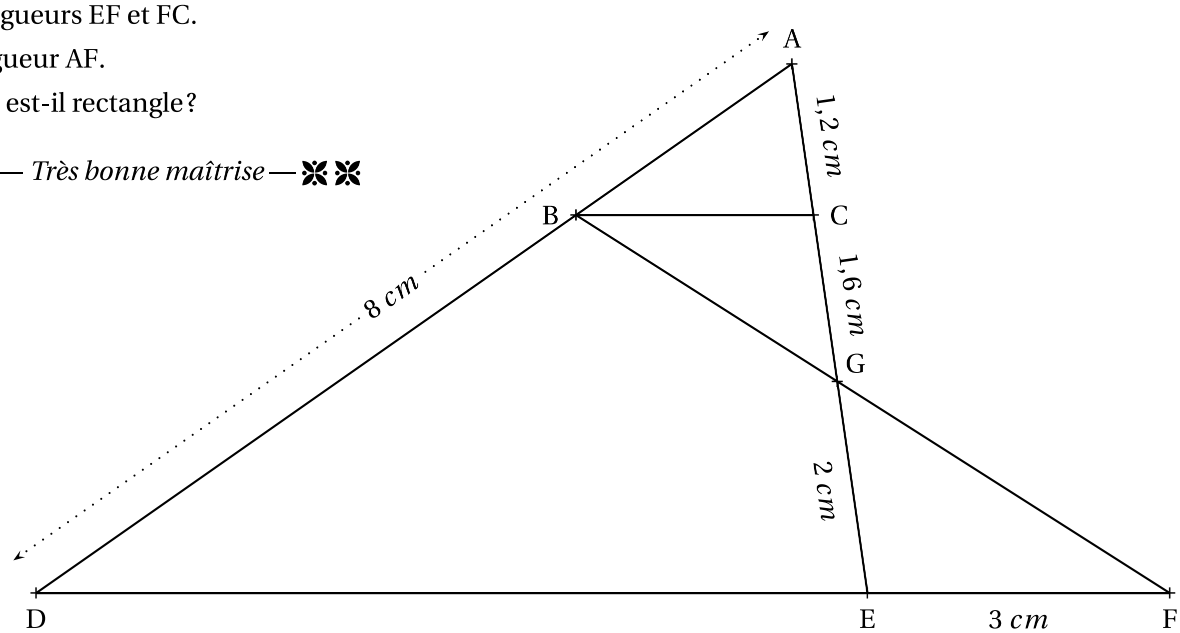
**2.** Calculer les longueurs BD et AE.

**3.** Calculer les longueurs EF et FC.

**4.** Calculer la longueur AF.

**5.** Le triangle AEF est-il rectangle ?

**Seconde partie** — *Très bonne maîtrise* — ✲✲




Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

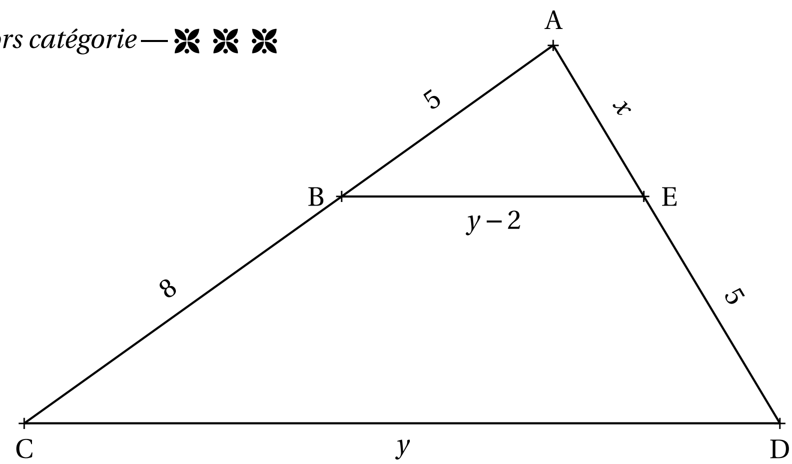
— D, E et F sont alignés ;
— A, B et D sont alignés ;
— A, C, G et E sont alignés ;
— (BC)//(DF).

**1.** Calculer BC.

**2.** Calculer DE et AB.

**3.** Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

**Troisième partie** — *Hors catégorie* — ✲✲✲




Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs :

— les grandeurs indiquées sont exprimées en mètres ;
— A, B et C sont alignés ;
— A, E et D sont alignés ;
— (BE)//(CD).

Calculer la valeur exacte de $x$ et de $y$.

## THÈME N$^{\text{o}}$ 3 : VRAI OU FAUX

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

### Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✲

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 1 :** : $\frac{3}{7}-\frac{5}{4}$ est un nombre négatif.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 2 :** : $\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}$ est égal à 0.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 3 :** : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 4 :** : 8 est la solution de l'équation $6x-3=4x+13$.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 5 :** : Un pavé droit dont les mesures sont 16 $cm$, 11 $cm$ et 6 $cm$ contient un volume supérieur à 1 L.

### Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✲✲

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 6 :** : Si $n$ est un nombre entier positif alors $2n+1$ est un nombre entier impair.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 7 :** : Si $n$ est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 8 :** : Un cylindre de rayon 5 $cm$ et de hauteur 10 $cm$ contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 $cm$ de rayon et de hauteur 5 $cm$

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 9 :** : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 10 :** : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x-15)(15x+35)=0$

### Troisième partie — *Hors catégorie* — ✲✲✲

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 11 :** : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 12 :** : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 13 :** : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 14 :** : Voici un programme de calcul :

— Choisir un nombre entier positif inférieur à 999;
— Le multiplier par 13;
— Enlever 5 au résultat précédent;
— Multiplier le tout par 11;
— Ajouter 49 au résultat précédent;
— Multiplier par 7;
— Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

**CONJECTURE N$^{\text{o}}$ 15 :** : $1+2+3+4+5+\ldots+100$ est égal à 5050

# Pour rester en forme en mathématiques...

Correction

## THÈME N° 1 : LE CALCUL LITTÉRAL

**Première partie** — *Maîtrise satisfaisante* —

**1.** Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$

$A(x) = 15x^2+9x+25x+15$

$\boxed{A(x) = 15x^2+34x+15}$

$B(x) = (2-3x)(6-7x)$

$B(x) = 12-14x-18x+21x^2$

$\boxed{B(x) = 21x^2-32x+12}$

$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$

$C(x) = -12x-28x^2+9+21x$

$\boxed{C(x) = -28x^2+9x+9}$

$D(x) = (2x+3)^2$

$D(x) = (2x+3)(2x+3)$

$D(x) = 4x^2+6x+6x+9$

$\boxed{D(x) = 4x^2+12x+9}$

On pouvait aussi utiliser l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Cela revient à calculer mentalement le terme $2ab$ c'est à dire ici le double de $6x$.

Cette méthode est recommandée pour les futurs élèves de seconde générale !

$E(x) = (5x-3)^2-9$

$E(x) = (5x-3)(5x-3)-9$

$E(x) = 25x^2-15x-15x+9-9$

$\boxed{E(x) = 25x^2-30x}$

$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

$F(x) = 30x^2+24x-15x-12$

$\boxed{F(x) = 30x^2+9x-12}$

**2.** Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3)+(5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)(2x-3)+(5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)[(2x-3)+(4x+5)]$

$G(x) = (5x-1)(2x-3+4x+5)$

$\boxed{G(x) = (5x-1)(6x+2)}$

$H(x) = (6x-1)(2x+9)-(2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)(2x+9)-(2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)[(2x+9)-(2x-9)]$

$H(x) = (6x-1)(2x+9-2x+9)$

Attention au changement de signe !

$H(x) = (6x-1)\times 18$

$\boxed{H(x) = 18(6x-1)}$

$I(x) = (5x-2)^2+(5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)(5x-2)+(5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)[(5x-2)+(3x-1)]$

$I(x) = (5x-2)(5x-2+3x-1)$

$\boxed{I(x) = (5x-2)(8x-3)}$

$J(x) = (3x-1)^2-(6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)(3x-1)-(6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)[(3x-1)-(6x+1)]$

$J(x) = (3x-1)(3x-1-6x-1)$

Attention au changement de signe !

$\boxed{J(x) = (3x-1)(-3x-2)}$

**3.** Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-2)(3x-1)=0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

$$3x-1=0$$
$$3x-1+1=1$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3}\approx 0,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,4 \text{ et } \frac{1}{3}}$

$$(6x-3)(1+7x)=0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$6x-3=0$$
$$6x-3+3=3$$
$$6x=3$$
$$x=\frac{3}{6}=0,5$$

$$1+7x=0$$
$$1+7x-1=-1$$
$$7x=-1$$
$$x=-\frac{1}{7}\approx -0,14$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,5 \text{ et } -\frac{1}{7}}$

## Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✲✲

**1.** Factoriser les expressions suivantes :

$K(x)=x^2-9$

On utilise l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$K(x)=x^2-3^2$

$\boxed{K(x)=(x+3)(x-3)}$

$L(x)=25x^2-49$

$L(x)=(5x)^2-7^2$

$\boxed{L(x)=(5x+7)(5x-7)}$

$N(x)=(3x+7)^2-(4x-1)^2$

Ici $A=(3x+7)$ et $B=(4x-1)$

$N(x)=[(3x+7)+(4x-1)]\,[(3x+7)-(4x-1)]$

$N(x)=[3x+7+4x-1]\,[3x+7-4x+1]$

$\boxed{N(x)=(7x+6)(-x+8)}$

$M(x)=(5x-1)^2-16$

$M(x)=(5x-1)^2-4^2$

On utilise à nouveau l'identité
$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

Ici $A=(5x-1)$ et $B=4$

$M(x)=[(5x-1)+4]\,[(5x-1)-4]$

$M(x)=[5x-1+4]\,[5x-1-4]$

$\boxed{M(x)=(5x+3)(5x-5)}$

**2.** Résoudre les équations suivantes :

Aucune des équations suivantes ne peut être résolue tel quel. Il ne faut pas développer ces expressions car la présence d'un terme en $x^2$ empêche la résolution (Voir la troisième partie).
La bonne idée consiste à factoriser ces expressions puis à utiliser la propriété « du produit nul ».

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)\,[(3x-1)+(2x-1)]=0$$

$$(5x-3)(3x-1+2x-1)=0$$

$$(5x-3)(5x-2)=0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$5x-3=0$$
$$5x-3+3=3$$
$$5x=3$$
$$x=\frac{3}{5}=0,6$$

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,6 \text{ et } 0,4}$

$$(4x-3)^2-(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)(4x-3)+(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)\,[(4x-3)-(5x-1)]=0$$

$$(4x-3)(4x-3-5x+1)=0$$

$$(4x-3)(-x-2)=0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$4x-3=0$$
$$4x-3+3=3$$
$$4x=3$$
$$x=\frac{3}{4}=0,75$$

$$-x-2=0$$
$$-x-2+2=2$$
$$-x=2$$
$$x=-2$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,75 \text{ et } -2}$

$$(3x-2)^2 = 25$$

C'est un cas difficile. Il faut penser à « faire apparaître »un zéro d'un côté de l'égalité puis factoriser l'expression en s'inspirant de l'identité remarquables $a^2 - b^2$

$$(3x-2)^2 - 25 = 25 - 25$$
$$(3x-2)^2 - 25 = 0$$
$$(3x-2)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(3x-2)+5]\,[(3x-2)-5] = 0$$
$$[3x-2+5]\,[3x-2-5] = 0$$
$$(3x+3)(3x-7) = 0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$3x+3 = 0$$
$$3x+3-3 = -3$$
$$3x = -3$$
$$x = \frac{-3}{3} = 1$$

$$3x-7 = 0$$
$$3x-7+7 = 7$$
$$3x = 7$$
$$x = \frac{7}{3} \approx 2,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{1 \text{ et } \frac{7}{3}}$

**Troisième partie** — *Hors catégorie* — ✵✵✵

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$

Vous pouvez constater qu'on ne sait pas la résoudre directement ! On aimerait bien factoriser $x^2 - 14x + 24$.

Vous ne savez pas résoudre une telle équation en troisième. Ces équations avec un terme en $x^2$ s'appelle des équations du second degré. Vous saurez les résoudre directement en première. En attendant, l'exercice propose une version simplifiée de la méthode. Le principe de cette méthode consiste à reconnaître le début d'une identité remarquable du type $(a+b)^2$ ou $(a-)^2$ puis d'effectuer la factorisation de $a^2 - b^2$

**1.** Développer $(x-7)^2$

$(x-7)^2 = \boxed{x^2 - 14x + 49}$

L'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**2.** Montrer que $x^2 - 14x + 24 = (x-7)^2 - 25$

$(x-7)^2 - 25 = x^2 - 14x + 49 - 25$

$\boxed{(x-7)^2 - 25 = x^2 - 14x + 24}$

**3.** Résoudre maintenant l'équation donnée au départ!

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x-7)^2 - 25 = 0$$

Nous allons utiliser l'identité $a^2 - b^2$ pour factoriser cette expression.

$$(x-7)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x-7)+5]\,[(x-7)-5] = 0$$
$$[x-7+5]\,[x-7-5] = 0$$
$$(x-2)(x-12) = 0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$x-2=0 \qquad\qquad x-12=0$$
$$x-2+2=2 \qquad\qquad x-12+12=12$$
$$x=2 \qquad\qquad x=12$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{2 \text{ et } 12}$

Vérifions : $2^2 - 14\times 2 + 24 = 4 - 28 + 24 = 0$ et $12^2 - 14\times 12 = 144 - 168 + 24 = 0$

Ainsi 2 et 12 sont bien les solutions attendues!

**Défi.** Pouvez-vous résoudre $x^2 + 8x - 9 = 0$ en vous inspirant des trois questions précédentes!

C'est une question très difficile. Nous allons utiliser le plan de la première partie!

Observons l'expression $x^2 + 8x - 9$. On veut que le début de l'expression ressemble à l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Comme $x^2 + 8x = x^2 + 2\times 4x$, on pense à l'identité $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$. C'est assez proche de l'expression cherchée.
L'écart entre les deux expressions est : $(x^2 + 8x + 16) - (x^2 + 8x - 9) = 16 + 9 = 25$.
Donc finalement $x^2 + 8x - 9 = (x^2 + 8x + 16) - 25 = (x+4)^2 - 25$

Or nous savons factoriser l'expression $(x+4)^2 - 25$ en utilisant l'identité $a^2 - b^2$.
Voici donc la résolution :

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$
$$(x+4)^2 - 25 = 0$$
$$(x+4)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x+4)+5]\,[(x+4)-5] = 0$$
$$[x+4+5]\,[x+4-5] = 0$$
$$(x+9)(x-1) = 0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$x+9=0 \qquad\qquad x-1=0$$
$$x+9-9=-9 \qquad\qquad x-1+1=1$$
$$x=-9 \qquad\qquad x=1$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-9 \text{ et } 1}$

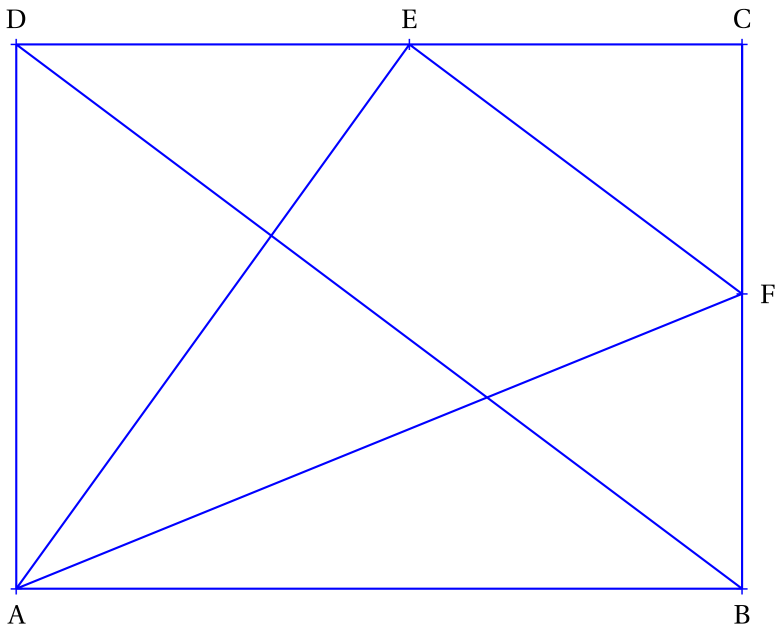
Vérifions : $1^2 + 8\times 1 - 9 = 1 + 8 - 9 = 0$ et $(-9)^2 + 8\times(-9) - 9 = 81 - 72 - 9 = 0$

## Thème n° 2 : géométrie

**Première partie** — *Maîtrise satisfaisante* — ✿

ABCD est un rectangle avec AB = 96 $mm$ et AD = 72 $mm$.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 $mm$.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

**1.** Réaliser la figure en vraies grandeurs.




**2.** Calculer les longueurs BD et AE.

Dans le triangle ABD rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$
$$96^2 + 72^2 = BD^2$$
$$BD^2 = 9216 + 5184$$
$$BD^2 = 14400$$
$$BD = \sqrt{14400}$$
$$BD = 120$$

$\boxed{BD = 120\ mm}$

Dans le triangle ADE rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$DA^2 + DE^2 = AE^2$$
$$72^2 + 52^2 = AE^2$$
$$AE^2 = 5184 + 2704$$
$$AE^2 = 7888$$
$$AE = \sqrt{7888}$$
$$AE \approx 88,8$$

$\boxed{AE = \sqrt{7888}\ mm \approx 88,8\ mm \text{ à } 0,1\ mm \text{ près.}}$

**3.** Calculer les longueurs EF et FC.

Dans le triangle DCB, $E \in [DC]$ et $F \in [CB]$
Les droites (DB) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = \frac{EF}{DB}$$
$$\frac{96\ mm - 52\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$$
$$\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm}$ alors $CF = \frac{72\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 33\ mm$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$ alors $EF = \frac{120\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 55\ mm$

Ainsi $\boxed{CF = 33\ mm \text{ et } EF = 55\ mm}$

**4.** Calculer la longueur AF.

Dans le triangle AFB rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BF^2 = AF^2$$
$$96^2 + (72-33)^2 = AF^2$$
$$AF^2 = 96^2 + 39^2$$
$$AF^2 = 9\,216 + 1\,521$$
$$AF^2 = 10\,737$$
$$AF = \sqrt{10\,737}$$
$$AF \approx 103,6$$

$\boxed{AF = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103,6\ mm \text{ à } 0,1\ mm \text{ près.}}$

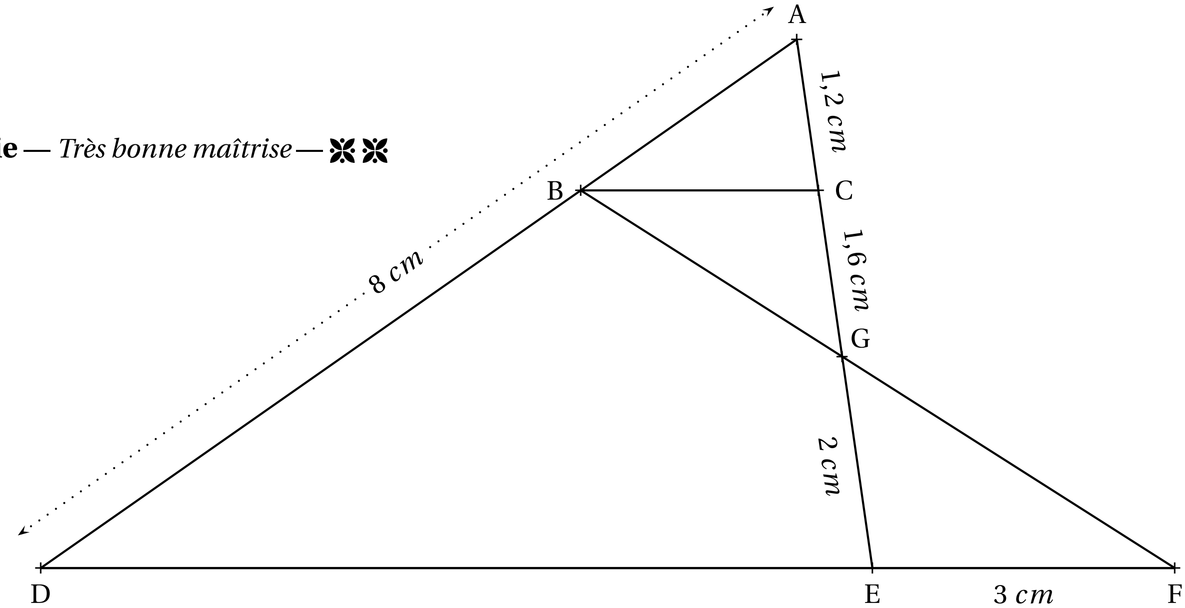
**5.** Le triangle AEF est-il rectangle ?

Dans le triangle AEF nous avons $EF = 55\ mm$, $EA = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88,8\ mm$ et $AF = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103,6\ mm$.
Comparons $AF^2$ et $EF^2 + EA^2$

Pour calculer $AF^2$ on peut passer par la valeur approchée mais il est plus rigoureux d'utiliser la valeur exacte.
En effet $AF^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$ d'après la définition de la racine carrée !

$AF^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$
$EF^2 + EA^2 = 55^2 + (\sqrt{7\,888})^2 = 3\,025 + 7\,888 = 10\,913$
On constate ainsi que $EF^2 + EA^2 \neq AF^2$
D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle EAF n'est pas rectangle}}$.

**Seconde partie** — *Très bonne maîtrise* — ✵✵




**1.** Calculer BC.

La difficulté consiste à se demander dans quelle configuration on se place !

Les droites (BF) et (EC) se coupent en G. Les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{GC}}{\text{GE}} = \frac{\text{GB}}{\text{GF}} = \frac{\text{BC}}{\text{EF}}$$

$$\frac{1{,}6\ cm}{2\ cm} = \frac{\text{GB}}{\text{GF}} = \frac{\text{BC}}{3\ cm}$$

Comme $\dfrac{1{,}6\ cm}{2\ cm} = \dfrac{\text{BC}}{3\ cm}$ on a $\text{BC} = \dfrac{3\ cm \times 1{,}6\ cm}{2\ cm} = 2{,}4\ cm$

$\boxed{\text{BC} = 2{,}4\ cm}$

**2.** Calculer DE et AB.

Dans le triangle ADE, B ∈ [AD] et C ∈ [AE]. Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{\text{AB}}{\text{AD}} = \frac{\text{AC}}{\text{AE}} = \frac{\text{BC}}{\text{DE}}$$

$$\frac{\text{AB}}{8\ cm} = \frac{1{,}2\ cm}{1{,}6\ cm + 2\ cm} = \frac{2{,}4\ cm}{\text{DE}}$$

$$\frac{\text{AB}}{8\ cm} = \frac{1{,}2\ cm}{3{,}6\ cm} = \frac{2{,}4\ cm}{\text{DE}}$$

Comme $\dfrac{\text{AB}}{8\ cm} = \dfrac{1{,}2\ cm}{3{,}6\ cm}$ on a $\text{AB} = \dfrac{8\ cm \times 1{,}2\ cm}{3{,}6\ cm} = \dfrac{9{,}6}{3{,}6}\ cm \approx 2{,}7\ cm$

Comme $\dfrac{2{,}4\ cm}{\text{DE}} = \dfrac{1{,}2\ cm}{3{,}6\ cm}$ on a $\text{DE} = \dfrac{2{,}4\ cm \times 3{,}6\ cm}{1{,}2\ cm} = 7{,}2\ cm$

$\boxed{\text{AB} \approx 2{,}7\ cm \text{ à } 0{,}1\ cm \text{ près et DE} = 7{,}2\ cm}$

**3.** Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

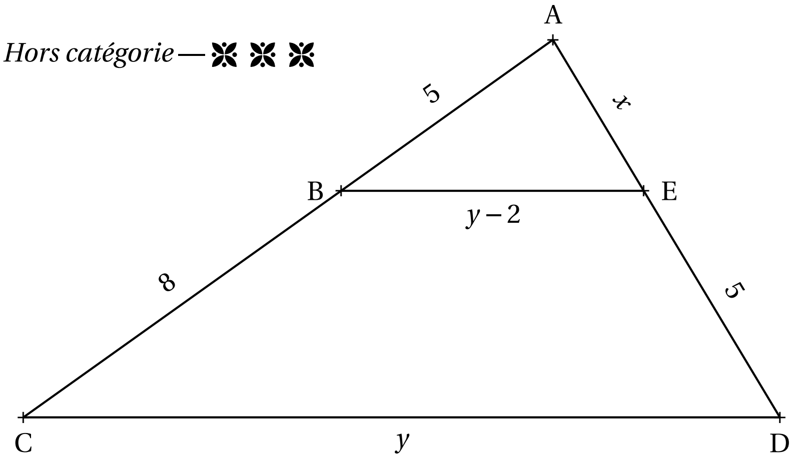
Comme les deux droites (BE) et (AF) coupent les droites (AD) et (DF) sécantes en D,

Nous allons comparer les quotients $\dfrac{\text{DB}}{\text{DA}}$ et $\dfrac{\text{DE}}{\text{DF}}$

$\dfrac{\text{DB}}{\text{DA}} = \dfrac{8\ cm - 2{,}7\ cm}{8\ cm} = \dfrac{5{,}3\ cm}{8\ cm} \approx 0{,}66$ et $\dfrac{\text{DE}}{\text{DF}} = \dfrac{7{,}2\ cm}{7{,}2\ cm + 3\ cm} = \dfrac{7{,}2\ cm}{10{,}2\ cm} \approx 0{,}71$

Comme $\dfrac{\text{DB}}{\text{DA}} \neq \dfrac{\text{DE}}{\text{DF}}$ d'après **la contraposée du théorème de Thalès** $\boxed{\text{les droites (BE) et (AF) ne sont pas parallèles.}}$

**Troisième partie** — *Hors catégorie* — ✻ ✻ ✻




Calculer la valeur exacte de $x$ et de $y$.

Dans le triangle ACD, B ∈ [AC] et E ∈ [AD].
Comme (BE)//(CD), d'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$
$$\frac{5}{5+8} = \frac{x}{x+5} = \frac{y-2}{y}$$
$$\frac{5}{13} = \frac{x}{x+5} = \frac{y-2}{y}$$

Nous allons utiliser la propriété des produits en croix pour obtenir des équations que nous savons résoudre.

Comme $\frac{5}{13} = \frac{x}{x+5}$ on en déduit que $5 \times (x+5) = 13 \times x$.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$5(x+5) = 13x$$
$$5x+25 = 13x$$
$$5x+25-5x = 13x-5x$$
$$25 = 8x$$
$$8x = 25$$
$$x = \frac{25}{8} = 3,125$$

Comme $\frac{5}{13} = \frac{y-2}{y}$ on en déduit que $5 \times y = 13 \times (y-2)$.
Il faut résoudre l'équation :

$$5y = 13(y-2)$$
$$5y = 13y-26$$
$$5y-5y = 13y-26-5y$$
$$0 = 8y-26$$
$$26 = 8y-26+26$$
$$26 = 8y$$
$$8y = 26$$
$$y = \frac{26}{8} = 3,25$$

$\boxed{x = 3,125 \text{ et } y = 3,25}$

## Thème n° 3 : Vrai ou faux

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

**Première partie** — *Maîtrise satisfaisante* — ✱

**Conjecture n° 1 :** : $\frac{3}{7} - \frac{5}{4}$ est un nombre négatif.

$\frac{3}{7} - \frac{5}{4} = \frac{12}{28} - \frac{35}{28} = -\frac{23}{28} < 0$

$\boxed{\text{Conjecture n° 1 : VRAIE}}$

**Conjecture n° 2 :** : $\frac{5}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{3}{7}$ est égal à 0.

Attention à la priorité de la multiplication.
$\frac{5}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{3} - \frac{5 \times 3}{3 \times 7} = \frac{5}{3} - \frac{5}{7} = \frac{35}{21} - \frac{15}{21} = \frac{20}{21}$

$\boxed{\text{Conjecture n° 2 : FAUSSE}}$

**Conjecture n° 3 :** : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

$13 = 13 \times 1$ : 13 est un multiple de 13 et 13 est premier.

$\boxed{\text{Conjecture n° 3 : FAUSSE}}$

**Conjecture n° 4 :** : 8 est la solution de l'équation $6x - 3 = 4x + 13$.

On peut tester cette proposition de solution :
Pour $x = 8$, $6x - 3 = 6 \times 8 - 3 = 48 - 3 = 45$ et $4x + 13 = 4 \times 8 + 13 = 32 + 13 = 45$
Donc 8 est une solution de l'équation.

On peut aussi résoudre cette équation (ce qui prouvera aussi que 8 est la seule solution !).

$$6x - 3 = 4x + 13$$
$$6x - 3 + 3 = 4x + 13 + 3$$
$$6x = 4x + 16$$
$$6x - 4x = 4x - 4x + 16$$
$$2x = 16$$
$$x = \frac{16}{2}$$
$$x = 8$$

$\boxed{\text{Conjecture n° 4 : VRAIE}}$

**Conjecture n° 5 :** : Un pavé droit dont les mesures sont 16 $cm$, 11 $cm$ et 6 $cm$ contient un volume supérieur à 1 L.

Le volume de ce pavé droit mesure : $16\ cm \times 11\ cm \times 6\ cm = 1\,056\ cm^3$. On sait que $1\ \text{L} = 1\ dm^3 = 1000\ cm^3$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 5 : VRAIE}}$

**Seconde partie** — *Très bonne maîtrise* — ✱✱

**CONJECTURE N° 6 :** : Si $n$ est un nombre entier positif alors $2n+1$ est un nombre entier impair.

On peut vérifier sur quelques exemples :
$n = 3$ on a $2n+1 = 2\times3+1 = 6+1 = 7$ : c'est impair.
$n = 10$ on a $2n+1 = 2\times10+1 = 20+1 = 21$ : c'est impair.
$n = 2020$ on a $2n+1 = 2\times2020+1 = 4040+1 = 4041$ : c'est impair !

Un nombre impair est un nombre dont le reste est 1 quand on le divise par 2. Cela signifie par exemple que le successeur d'un nombre pair est un nombre impair.Pour $n$ un nombre entier positif, $2n$ est un nombre pair puisque c'est un multiple de 2. $2n+1$ est le successeur de $2n$, il est donc impair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 6 : VRAIE}}$

**CONJECTURE N° 7 :** : Si $n$ est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

Pour $n = 2$ on a $3n = 3\times2 = 6$ : c'est un nombre pair. Plus généralement, $3n$ est pair dès que $n$ est pair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 7 : FAUSSE}}$

**CONJECTURE N° 8 :** : Un cylindre de rayon 5 $cm$ et de hauteur 10 $cm$ contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 $cm$ de rayon et de hauteur 5 $cm$

Le volume d'un cylindre s'exprime sous la forme : Aire de la base × Hauteur $= \pi\times R^2\times h$

Le volume d'un cône s'exprime sous la forme : $\frac{1}{3}\times$ Aire de la base × Hauteur $= \frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times h$

Le cylindre à un volume de : $\pi\times(5\ cm)^2\times10\ cm = \pi\times25\times10\ cm^3 = 250\pi\ cm^3$

Le cône à un volume de : $\frac{1}{3}\times\pi\times(12\ cm)^2\times5\ cm = \frac{1}{3}\times144\times5\pi\ cm3 = 240\pi\ cm^3$

$\boxed{\text{Conjecture n° 8 : VRAIE}}$

**CONJECTURE N° 9 :** : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

La somme des carrés de deux nombres : $3^2+4^2 = 9+16 = 25$
Le carré de la somme de deux nombres : $(3+4)^2 = 7^2 = 49$

Comme $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ l'écart entre $(a+b)^2$ et $a^2+b^2$ est $2ab$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 9 : FAUSSE}}$

**CONJECTURE N° 10 :** : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x-15)(15x+35) = 0$

Il faut résoudre l'équation : $(9x-15)(15x+35) = 0$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$9x-15 = 0$$
$$9x-15+15 = 15$$
$$9x = 15$$
$$x = \frac{15}{9}$$
$$x = \frac{5}{3}$$

$$15x+35 = 0$$
$$15x+35-35 = -35$$
$$15x = -35$$
$$x = -\frac{35}{15}$$
$$x = -\frac{7}{3}$$

$\boxed{\text{Conjecture n° 10 : VRAIE}}$

**Troisième partie** — *Hors catégorie* — ✻✻✻

**CONJECTURE N° 11 :** : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$4+5=9$ : impair.
$10+17=27$ : impair.

Un nombre pair quelconque peut s'écrire $2n$ où $n$ est un entier.
Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où $p$ est un entier.
Effectuons la somme de $2n$ et $2p+1$ : $2n+2p+1=2(n+p)+1$ : on a factorisé 2.
Donc la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair quelconques peut s'écrire $2k+1$ où $k=n+p$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

Conjecture n° 11 : VRAIE

**CONJECTURE N° 12 :** : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7+5=12$ : pair.
$11+17=28$ : pair.

Un premier nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où $n$ est un entier.
Un second nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où $p$ est un entier.
Effectuons la somme de $2n+1$ et $2p+1$ : $2n+1+2p+1=2n+2p+2=2(n+p+1)$ : on a factorisé 2.
Donc la somme de deux nombres impairs quelconques peut s'écrire $2k$ où $k=n+p+1$.
C'est l'écriture d'un nombre pair !

Conjecture n° 12 : VRAIE

**CONJECTURE N° 13 :** : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7^2=49$ : impair.
$11^2=121$ : impair.

Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où $n$ est un entier.
Le carré d'un nombre impair peut donc s'écrire $(2n+1)^2$
$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$ : on a factorisé 2.
Donc le carré d'un nombre impair quelconque peut s'écrire $2k+1$ où $k=2n^2+2n$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

Conjecture n° 13 : VRAIE

**CONJECTURE N° 14 :** : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 999 ;
- Le multiplier par 13 ;
- Enlever 5 au résultat précédent ;
- Multiplier le tout par 11 ;
- Ajouter 49 au résultat précédent ;
- Multiplier par 7 ;
- Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

Testons avec quelques nombres :

Avec 67 : $13 \times 67 = 871$, $871 - 5 = 866$ puis $11 \times 866 = 9\,526$, $9\,526 + 49 = 9\,575$
Et enfin $7 \times 9\,575 = 67\,025$ puis $67\,025 + 42 = 67\,067$

Avec 567 : $13 \times 567 = 7\,371$, $7\,371 - 5 = 7\,366$ puis $11 \times 7\,366 = 81\,026$, $81\,026 + 49 = 81\,075$
Et enfin $7 \times 81\,075 = 567\,525$ puis $567\,525 + 42 = 567\,567$

Le nombre de départ semble répété deux fois dans le nombre résultat.

Notons $x$ le nombre entier choisi au départ.
On le multiplie par 13 : $13x$
On enlève 5 : $13x - 5$
On multiplie le tout par 11 : $11(13x - 5) = 143x - 55$
On ajoute 49 : $143x - 55 + 49 = 143x - 6$
On multiplie par 7 : $7(143x - 6) = 1\,001x - 42$
On ajoute 42 : $1\,001x - 42 + 42 = 1\,001x$

Ainsi ce programme de calcul revient à multiplier le nombre de départ par 1 001.
En multipliant un nombre par 1 001 on obtient bien l'effet attendu !

**CONJECTURE N° 15 :** : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100$ est égal à 5 050

C'est une question célèbre ! On raconte qu'elle a été posée vers 1784 par un instituteur à une classe d'élèves de 7 ans qu'il voulait punir en leur donnant cette très longue addition. Dans cette classe cependant se trouvait celui qui allait devenir le plus grand mathématicien du XIX^e^ siècle : Carl Friedrich Gauss. Celui-ci au bout de quelques secondes leva son ardoise avec le bon résultat ! Voici comment il s'y est pris ! Vous attendrez d'être en première pour découvrir les suites arithmétiques et une formule générale qui résoud ce problème

L'idée géniale est d'écrire cette somme dans un sens puis dans l'autre sens :

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & ... & + & 97 & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & ... & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
S+S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Au lieu d'ajouter horizontalement il faut penser à ajouter verticalement.
On obtient le double de la somme et 100 fois le nombre 101.
Ainsi le double de la somme est égale à $100 \times 101 = 10\,100$

La somme S cherchée vaut donc $10\,100 \div 2 = 5\,050$

Conjecture n° 15 : VRAIE