# V — Annexes

## 1 Exercices

## EXERCICE N° 7.1 : **Une urne et des boules**

Une urne contient des boules indiscernables au toucher :

- 2 boules vertes;
- 5 boules bleues;
- 1 boules noires;
- 4 boules blanches.

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

**1.** Quelle est la probabilité d'obtenir une boule bleue?

**2.** Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche?

**3.** Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ou une boule bleue?

**4.** Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une boule noire?

## EXERCICE N° 7.2 : **Une urne et des boules alphabétiques**

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
Sur chaque boule est écrit une lettre.
En utilisant **toutes** les boules on peut former le plus long mot de la langue française :

**ANTICONSTITUTIONNELLEMENT**

On choisit une boule dans l'urne sans regarder.

**1.** Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre **T**.

**2.** Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle?

**3.** Quelle est la probabilité d'obtenir une des lettres du mot **MATHEMATIQUES**?

**4.** Quelle est la probabilité de ne pas obtenir une lettre du mot **LOGIQUE**?

**5.** Quelle est la probabilité d'obtenir un **J**?

## EXERCICE N° 7.1 : **Une urne et des boules** CORRECTION

L'expérience aléatoire consiste à choisir un boule indiscernable au toucher dans une urne contenant $2+5+1+4=12$ boules.
Comme elles sont indiscernables au toucher, nous pouvons dire que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

**1.** Il y a 5 boules bleues et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{12} \approx 0,42$ soit environ 42 %.

**2.** Il y a 4 boules blanches et 12 boules en tout.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$ soit environ 33 %.

**3.** Il y a 2 boules vertes et 4 boules bleues. Il y a donc 6 boules sur 12 qui conviennent.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ soit environ 50 %.

**4.** Il y a 1 boule noire, il reste donc 11 boules non noires sur 12.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{11}{12} \approx 0,92$ soit environ 92 %.

## EXERCICE N° 7.2 : **Une urne et des boules alphabétiques** CORRECTION

L'expérience aléatoire consiste à choisir une boule sur lequel est écrit une lettre du mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** : il y a 25 lettres !
Comme les boules sont indiscernables au toucher, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

**1.** Il y a cinq T sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ soit 20 %.

**2.** Il y a dix voyelles sur 25 lettres.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

**3.** Les lettres communes entre **MATHEMATIQUES** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : A, T, E, I, U et S.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : un A, cinq T, trois E, trois I, un U et un S soit $1+5+3+3+1+1=14$ lettres communes avec **MATHEMATIQUES**.

La probabilité de l'événement cherché est : $\dfrac{14}{25} = 0,56$ soit 56 %.

**4.** Le contraire de l'événement est « obtenir une lettre du mot **LOGIQUE**. »
Les lettres communes entre **LOGIQUE** et **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** sont : L, O, I, U et E.
Dans **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT** il y a : deux L, deux O, trois I, un U, deux E soit $2+2+3+1+2=10$ lettres.

La probabilité d'obtenir une lettre du mot **LOGIQUE** est donc : $\dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ soit 40 %.

La probabilité du contraire est donc $\dfrac{3}{5} = 0,6$ soit 60 % car 40 % + 60 % = 100 %.

**5.** Il n'y a pas de J dans le mot **ANTICONSTITUTIONNELLEMENT**.

La probabilité cherchée est 0 %.

## 2 Évaluations

# Évaluation de mathématiques

**Exercice 1** : On pose $f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

**1.** Développer et réduire $f(x)$ et montrer que $f(x) = 5x^2 - 53x + 30$

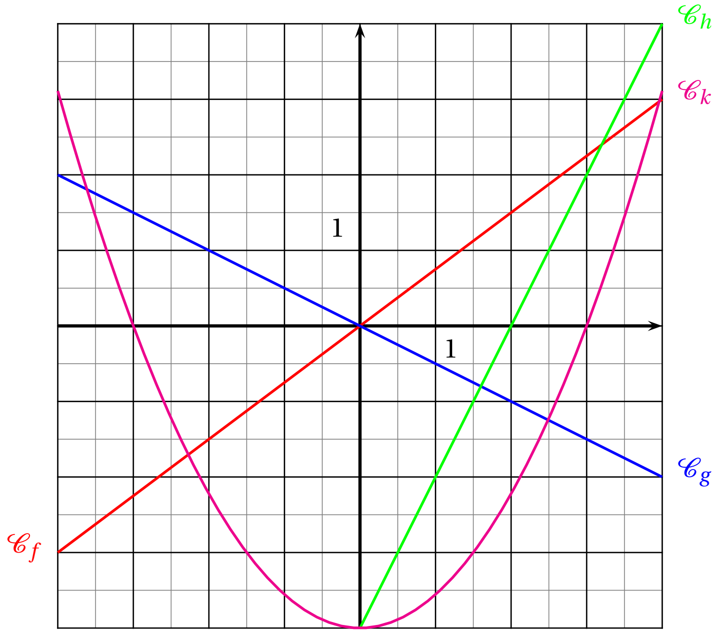
**2.** Calculer en détaillant vos calculs $f(0)$ et $f(-1)$.

**3.a.** En utilisant la forme développée, résoudre l'équation $f(x) = 30$.
**3.b.** Quels sont les antécédents de 30 par la fonction $f$ ?

**4.** Montrer que $f(x) = (5x-3)(x-10)$

**5.a.** Résoudre l'équation $(5x-3)(x-10) = 0$
**5.b.** Quels sont les antécédents de 0 par la fonction $f$ ?

**Exercice 2**




Ci-après sont tracées $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ les courbes représentatives des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$.

**1.** Lire sur le graphique sans justification :
$f(-4)$, $g(-2)$, $h(1)$ et $k(-3)$

**2.** Lire sur le graphique sans justification, le ou les antécédents de 0 pour chacune des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$.

**3.** Lesquels de ces fonctions sont linéaires, justifier votre réponse.

**4.** Même si les images suivantes n'apparaissent pas sur le graphique, calculer en justifiant votre réponse :
$f(10)$ et $g(50)$

**Exercice 3**
J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans le paquets que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisi sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

**1.** Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?
**2.** Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?
**3.** Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

**4.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?
**5.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?
**6.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

# Évaluation de mathématiques

Correction

**Exercice 1** : On pose $f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

**1.** Développer et réduire $f(x)$ et montrer que $f(x) = 5x^2 - 53x + 30$

$f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$
$f(x) = (25x^2 - 30x + 9) - (20x^2 + 35x - 12x - 21)$
Il faut séparer les deux parties de l'expression pour ne pas commettre d'erreur.
Pour développer $(5x-3)^2$ on peut écrire $(5x-3)(5x-3)$ et utiliser la méthode habituelle.
$f(x) = 25x^2 - 30x + 9 - 20x^2 - 35x + 12x + 21$
Attention aux changement de signe. Le moins devant la seconde parenthèse signifie « prendre l'opposé »de l'expression entre parenthèse.
$\boxed{f(x) = 5x^2 - 53x + 30}$

**2.** Calculer en détaillant vos calculs $f(0)$ et $f(-1)$.

Il suffit de remplace $x$ par 0 et par $-1$ en utilisant la forme développée : c'est plus rapide !
$f(0) = 5 \times 0^2 - 53 \times 0 + 30 = \boxed{30}$

$f(-1) = 5 \times (-1)^2 - 53 \times (-1) + 30$
Attention à $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$ et par $-1$ !!
$f(-1) = 5 \times 1 + 53 + 30 = \boxed{88}$

**3.a.** En utilisant la forme développée, résoudre l'équation $f(x) = 30$.

Il faut résoudre :

$$5x^2 - 53x + 30 = 30$$

$$5x^2 - 53x = 0$$

Quand on voit une équation avec un $x^2$ il faut penser à l'équation produit et donc essayer de factoriser !

$$5x \times x - 53 \times x = 0$$

$$x(5x-53) = 0$$

$x(5x-53)$ est bien la forme factorisée de $5x^2 - 53x$ il suffit de développer pour s'en rendre compte.

$$x(5x-53) = 0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul**
En clair, $x(5x-53)$ est le produit de $x$ par $5x-53$. Pour que ce produit soit égal à 0 il faut que l'un des deux facteurs soit nul. Nous allons donc résoudre deux équations.

$$5x - 53 = 0$$

$$5x - 53 + 53 = 53$$

$$x = 0 \qquad\qquad 5x = 53$$

$$x = \frac{53}{5} = 10,6$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{0 \text{ et } \frac{53}{5}}$.

**3.b.** Quels sont les antécédents de 30 par la fonction $f$ ?

Les antécédents de 30 par $f$ sont les nombres $x$ tels que $f(x) = 30$, c'est à dire les nombres dont l'image est 30. Ce sont donc les solutions de l'équation précédente.

$\boxed{0 \text{ et } \frac{53}{5} \text{ sont les antécédents de 30 par } f.}$

**4.** Montrer que $f(x) = (5x-3)(x-10)$

On reconnaît une forme factorisée, on peut la développer pour démontrer le résultat.

$(5x-3)(x-10) = 5x^2 - 50x - 3x + 30 = 5x^2 - 53x + 30$

On obtient bien le résultat attendu !

On peut aussi tenter de factoriser l'expression de départ.

$f(x) = (5x-3)^2 - (5x-3)(4x+7)$

$f(x) = (5x-3)(5x-3) - (5x-3)(4x+7)$

$f(x) = (5x-3)[(5x-3) - (4x+7)]$

$f(x) = (5x-3)(5x-3-4x-7)$

$\boxed{f(x) = (5x-3)(x-10)}$

**5.a.** Résoudre l'équation $(5x-3)(x-10) = 0$

On reconnaît encore une forme factorisée.

$$(5x-3)(x-10) = 0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$5x - 3 = 0$$

$$5x - 3 + 3 = 3$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$x - 10 = 0$$

$$x - 10 + 10 = 10$$

$$x = 10$$

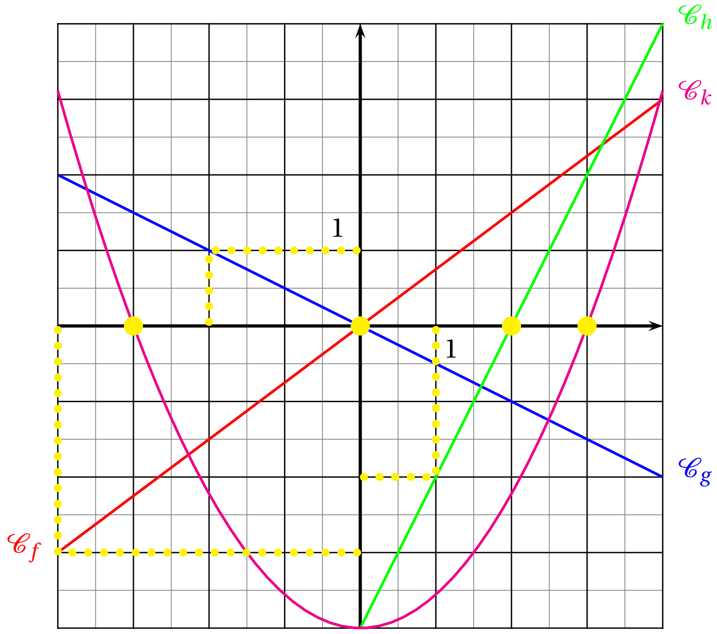
Il y a deux solutions : $\boxed{0,6 \text{ et } 10}$

**5.b.** Quels sont les antécédents de 0 par la fonction $f$ ?

Je joue une nouvelle fois avec le vocabulaire : les antécédents de 0 par $f$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

$\boxed{\text{Les antécédents de 0 par } f \text{ sont } 0,6 \text{ et } 10.}$

**Exercice 2**




Ci-après sont tracées $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ les courbes représentatives des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$.

**1.** Lire sur le graphique sans justification :
$f(-4)$, $g(-2)$, $h(1)$ et $k(-3)$

$f$ est représentée graphiquement par la droite orange. Le point de cette droite ayant pour abscisse $-4$ a pour ordonnée $-3$.
Donc $\boxed{f(-4) = -3}$

$g$ est représentée graphiquement par la droite bleue. Le point de cette droite ayant pour abscisse $-2$ a pour ordonnée 1.
Donc $\boxed{g(-2) = 1}$

$h$ est représentée graphiquement par la droite verte. Le point de cette droite ayant pour abscisse 1 a pour ordonnée $-2$.
Donc $\boxed{h(1) = -2}$

$k$ est représentée graphiquement par la parabole (oui cela s'appelle comme cela!) rose. Le point de cette courbe ayant pour abscisse $-3$ a pour ordonnée 0.
Donc $\boxed{k(-3) = 0}$

**2.** Lire sur le graphique sans justification, le ou les antécédents de 0 pour chacune des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$.

Les antécédents de 0 pour chaque fonction correspondent aux abscisses des points d'intersection de chaque courbe avec l'axe des abscisses, en effet sur l'axe des abscisses les ordonnées sont égales 0.

La droite qui représente $f$ coupe l'axe des abscisses en $(0;0)$ donc $\boxed{\text{0 est l'antécédent de 0 par } f}$.

La droite qui représente $g$ coupe l'axe des abscisses en $(0;0)$ donc $\boxed{\text{0 est l'antécédent de 0 par } g}$.

La droite qui représente $h$ coupe l'axe des abscisses en $(2;0)$ donc $\boxed{\text{2 est l'antécédent de 0 par } h}$.

La parabole qui représente $k$ coupe l'axe des abscisses en $(-3;0)$ et $(3;0)$ donc $\boxed{-3 \text{ et } 3 \text{ sont les antécédents de 0 par } k}$.

**3.** Lesquels de ces fonctions sont linéaires, justifier votre réponse.

D'après le cours, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.

$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont linaires.}}$

**4.** Même si les images suivantes n'apparaissent pas sur le graphique, calculer en justifiant votre réponse :
$f(10)$ et $g(50)$

$f$ est linéaire. Donc il existe un nombre $a$ tel que pour tous les nombres $x$ on a $f(x) = a \times x$

Or nous avons vu que $f(-4) = -3$, nous pouvons donc calculer $a$.

$f(-4) = a \times -4 = -3$ donc $a = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$

Ainsi $f(x) = 0,75x$ d'où $\boxed{f(10) = 0,75 \times 10 = 7,5}$

De même $g(-2) = 1$ donc comme $g(x) = a \times x$ on a $a \times (-2) = 1$ d'où $a = \dfrac{1}{-2} = -0,5$

Ainsi $g(x) = -0,5x$ et $\boxed{g(50) = -0,5 \times 50 = -25}$

**Exercice 3**

J'ai acheté un paquet de bonbons pour grignoter pendant la séance de cinéma. Il ne reste plus dans le paquets que un bonbon goût réglisse, un goût citron, un goût fraise et deux goût cola. J'adore les bonbons goût cola. Je déteste le réglisse.

J'ai envie de manger un bonbon. Je choisi sans regarder un de ces bonbons non discernables au toucher.

**1.** Quelle est la probabilité de choisir mon bonbon préféré ?

L'expérience aléatoire considérée est à une épreuve, elle consiste choisir un bonbon sans regarder. Nous sommes donc dans un modèle d'équiprobabilité.

Il y a $1+1+1+2 = 5$ bonbons dans le paquets.

Deux bonbons sont mes préférés. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{5} = 0,4 \text{ soit } 40\%}$

**2.** Quelle est la probabilité d'éviter le goût que je déteste ?

Il y a un seul bonbon au réglisse. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{1}{5} = 0,2 \text{ soit } 20\%}$

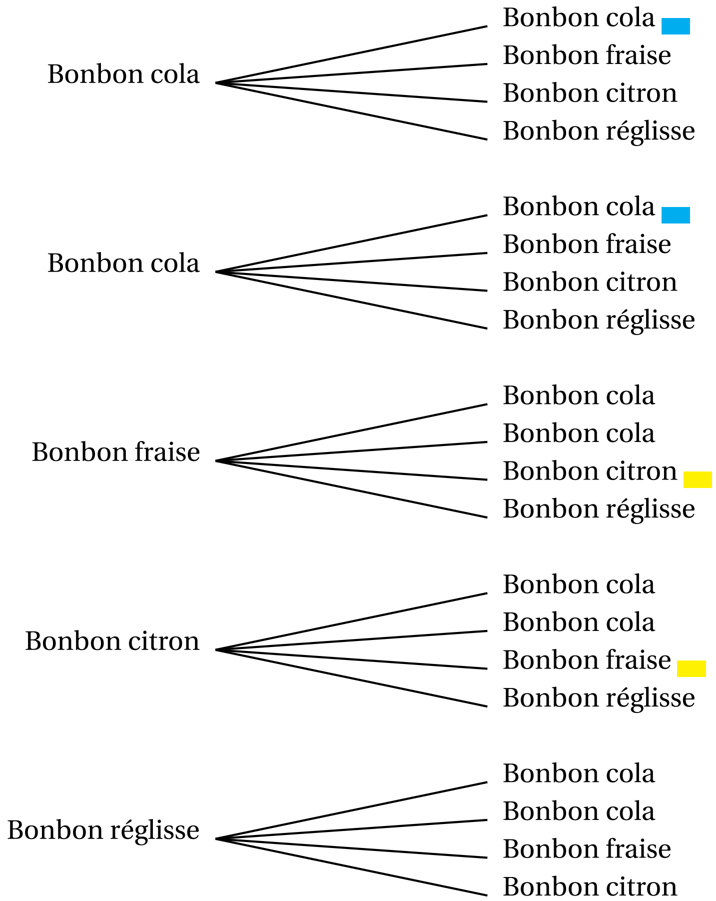
**3.** Quelle est la probabilité de choisir un bonbon à la fraise ou au citron ?

Deux bonbons sont au citron ou à la fraise. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{5} = 0,4 \text{ soit } 40\%}$

Finalement je décide d'en manger deux et de les choisir à la suite dans le paquet sans regarder.

**4.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons goût cola à la suite ?

Nous sommes maintenant dans une expérience aléatoire à deux épreuves, nous pouvons la modéliser sous forme d'un arbre.




Il y a 20 branches équiprobables.

Deux branches correspondent à la question. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1 \text{ soit } 10\%}$.

**5.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard deux bonbons que je déteste à la suite ?

C'est impossible puisqu'il n'y a qu'un bonbon réglisse. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est 0.}}$

**6.** Quelle est la probabilité de choisir par hasard ni un bonbon au cola ni un bonbon au réglisse ?

Deux branches correspondent à la question. $\boxed{\text{La probabilité cherchée est } \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1 \text{ soit } 10\%}$.

# Pour rester en forme en mathématiques...

Voici une sélection d'exercices qui couvrent trois thèmes du programme de troisième.
Chaque thème est décliné en trois niveaux d'expertise :

- ✠— Maîtrise satisfaisante (le niveau attendu pour le Brevet) ;
- ✠✠— Très bonne maîtrise (le niveau recommandé pour le lycée général) ;
- ✠✠✠— Hors catégorie (pour les passionnés qui aiment se creuser la tête).

À vous d'essayer d'aller le plus loin possible !

## THÈME N° 1 : LE CALCUL LITTÉRAL

### Première partie — *Maîtrise satisfaisante* — ✠

**1.** Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$
$B(x) = (2-3x)(6-7x)$
$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$
$D(x) = (2x+3)^2$
$E(x) = (5x-3)^2 - 9$
$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

**2.** Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$
$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$
$I(x) = (5x-2)^2 + (5x-2)(3x-1)$
$J(x) = (3x-1)^2 - (6x+1)(3x-1)$

**3.** Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-2)(3x-1) = 0$$
$$(6x-3)(1+7x) = 0$$

### Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✠✠

**1.** Factoriser les expressions suivantes :

$K(x) = x^2 - 9$
$L(x) = 25x^2 - 49$
$M(x) = (5x-1)^2 - 16$
$N(x) = (3x+7)^2 - (4x-1)^2$

**2.** Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-3)(3x-1) + (5x-3)(2x-1) = 0$$
$$(4x-3)^2 - (4x-3)(5x-1) = 0$$
$$(3x-2)^2 = 25$$

### Troisième partie — *Hors catégorie* — ✠✠✠

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$

Vous pouvez constater qu'on ne sait pas la résoudre directement ! On aimerait bien factoriser $x^2 - 14x + 24$.

**1.** Développer $(x-7)^2$

**2.** Montrer que $x^2 - 14x + 24 = (x-7)^2 - 25$

**3.** Résoudre maintenant l'équation donnée au départ !

**Défi.** Pouvez-vous résoudre $x^2 + 8x - 9 = 0$ en vous inspirant des trois questions précédentes !

## THÈME N$^{\text{O}}$ 2 : GÉOMÉTRIE

**Première partie** — *Maîtrise satisfaisante* — ❋

ABCD est un rectangle avec AB = 96 $mm$ et AD = 72 $mm$.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 $mm$.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

**1.** Réaliser la figure en vraies grandeurs.

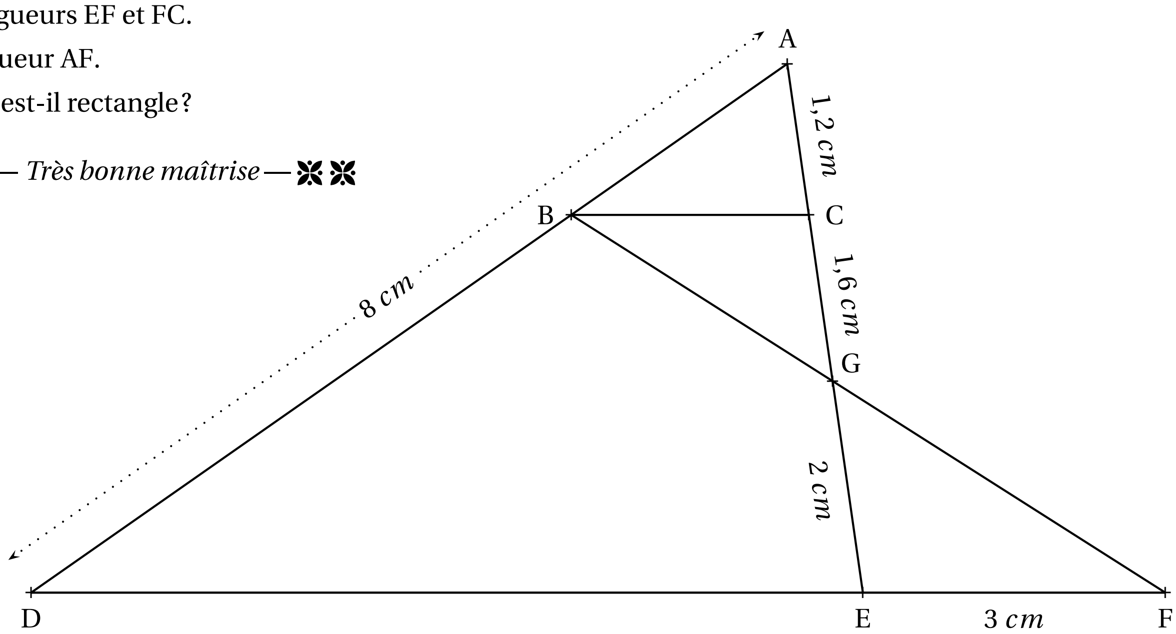
**2.** Calculer les longueurs BD et AE.

**3.** Calculer les longueurs EF et FC.

**4.** Calculer la longueur AF.

**5.** Le triangle AEF est-il rectangle ?

**Seconde partie** — *Très bonne maîtrise* — ❋ ❋




Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs, nous avons :

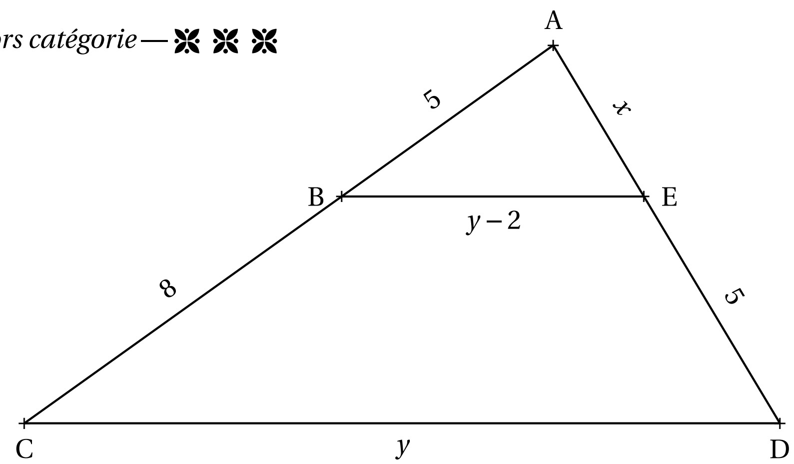
- D, E et F sont alignés ;
- A, B et D sont alignés ;
- A, C, G et E sont alignés ;
- (BC)//(DF).

**1.** Calculer BC.

**2.** Calculer DE et AB.

**3.** Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles ?

**Troisième partie** — *Hors catégorie* — ❋ ❋ ❋




Sur la figure ci-dessus qui n'est pas en vraies grandeurs :

- les grandeurs indiquées sont exprimées en mètres ;
- A, B et C sont alignés ;
- A, E et D sont alignés ;
- (BE)//(CD).

Calculer la valeur exacte de $x$ et de $y$.

## Thème n° 3 : Vrai ou faux

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

**Première partie** — *Maîtrise satisfaisante* — ✻

**Conjecture n° 1 :** : $\frac{3}{7}-\frac{5}{4}$ est un nombre négatif.

**Conjecture n° 2 :** : $\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}$ est égal à 0.

**Conjecture n° 3 :** : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

**Conjecture n° 4 :** : 8 est la solution de l'équation $6x-3=4x+13$.

**Conjecture n° 5 :** : Un pavé droit dont les mesures sont 16 $cm$, 11 $cm$ et 6 $cm$ contient un volume supérieur à 1 L.

**Seconde partie** — *Très bonne maîtrise* — ✻✻

**Conjecture n° 6 :** : Si $n$ est un nombre entier positif alors $2n+1$ est un nombre entier impair.

**Conjecture n° 7 :** : Si $n$ est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

**Conjecture n° 8 :** : Un cylindre de rayon 5 $cm$ et de hauteur 10 $cm$ contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 $cm$ de rayon et de hauteur 5 $cm$

**Conjecture n° 9 :** : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

**Conjecture n° 10 :** : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x-15)(15x+35)=0$

**Troisième partie** — *Hors catégorie* — ✻✻✻

**Conjecture n° 11 :** : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

**Conjecture n° 12 :** : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

**Conjecture n° 13 :** : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

**Conjecture n° 14 :** : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 999;
- Le multiplier par 13;
- Enlever 5 au résultat précédent;
- Multiplier le tout par 11;
- Ajouter 49 au résultat précédent;
- Multiplier par 7;
- Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

**Conjecture n° 15 :** : $1+2+3+4+5+...+100$ est égal à 5050

# Pour rester en forme en mathématiques...

Correction

## THÈME N° 1 : LE CALCUL LITTÉRAL

**Première partie** — *Maîtrise satisfaisante* —

**1.** Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (3x+5)(5x+3)$

$A(x) = 15x^2 + 9x + 25x + 15$

$\boxed{A(x) = 15x^2 + 34x + 15}$

$B(x) = (2-3x)(6-7x)$

$B(x) = 12 - 14x - 18x + 21x^2$

$\boxed{B(x) = 21x^2 - 32x + 12}$

$C(x) = (4x-3)(-3-7x)$

$C(x) = -12x - 28x^2 + 9 + 21x$

$\boxed{C(x) = -28x^2 + 9x + 9}$

$D(x) = (2x+3)^2$

$D(x) = (2x+3)(2x+3)$

$D(x) = 4x^2 + 6x + 6x + 9$

$\boxed{D(x) = 4x^2 + 12x + 9}$

On pouvait aussi utiliser l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Cela revient à calculer mentalement le terme $2ab$ c'est à dire ici le double de $6x$.

Cette méthode est recommandée pour les futurs élèves de seconde générale !

$E(x) = (5x-3)^2 - 9$

$E(x) = (5x-3)(5x-3) - 9$

$E(x) = 25x^2 - 15x - 15x + 9 - 9$

$\boxed{E(x) = 25x^2 - 30x}$

$F(x) = (6x-3)(5x+4)$

$F(x) = 30x^2 + 24x - 15x - 12$

$\boxed{F(x) = 30x^2 + 9x - 12}$

**2.** Factoriser les expressions suivantes :

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)(2x-3) + (5x-1)(4x+5)$

$G(x) = (5x-1)[(2x-3) + (4x+5)]$

$G(x) = (5x-1)(2x-3+4x+5)$

$\boxed{G(x) = (5x-1)(6x+2)}$

$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)(2x+9) - (2x-9)(6x-1)$

$H(x) = (6x-1)[(2x+9) - (2x-9)]$

$H(x) = (6x-1)(2x+9-2x+9)$

Attention au changement de signe !

$H(x) = (6x-1) \times 18$

$\boxed{H(x) = 18(6x-1)}$

$I(x) = (5x-2)^2 + (5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)(5x-2) + (5x-2)(3x-1)$

$I(x) = (5x-2)[(5x-2) + (3x-1)]$

$I(x) = (5x-2)(5x-2+3x-1)$

$\boxed{I(x) = (5x-2)(8x-3)}$

$J(x) = (3x-1)^2 - (6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)(3x-1) - (6x+1)(3x-1)$

$J(x) = (3x-1)[(3x-1) - (6x+1)]$

$J(x) = (3x-1)(3x-1-6x-1)$

Attention au changement de signe !

$\boxed{J(x) = (3x-1)(-3x-2)}$

**3.** Résoudre les équations suivantes :

$$(5x-2)(3x-1)=0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

$$3x-1=0$$
$$3x-1+1=1$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3}\approx 0,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,4 \text{ et } \frac{1}{3}}$

$$(6x-3)(1+7x)=0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$6x-3=0$$
$$6x-3+3=3$$
$$6x=3$$
$$x=\frac{3}{6}=0,5$$

$$1+7x=0$$
$$1+7x-1=-1$$
$$7x=-1$$
$$x=-\frac{1}{7}\approx -0,14$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,5 \text{ et } -\frac{1}{7}}$

## Seconde partie — *Très bonne maîtrise* — ✸✸

**1.** Factoriser les expressions suivantes :

$K(x)=x^2-9$

On utilise l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$K(x)=x^2-3^2$

$\boxed{K(x)=(x+3)(x-3)}$

$L(x)=25x^2-49$

$L(x)=(5x)^2-7^2$

$\boxed{L(x)=(5x+7)(5x-7)}$

$N(x)=(3x+7)^2-(4x-1)^2$

Ici $A=(3x+7)$ et $B=(4x-1)$

$N(x)=[(3x+7)+(4x-1)]\,[(3x+7)-(4x-1)]$

$N(x)=[3x+7+4x-1]\,[3x+7-4x+1]$

$\boxed{N(x)=(7x+6)(-x+8)}$

$M(x)=(5x-1)^2-16$

$M(x)=(5x-1)^2-4^2$

On utilise à nouveau l'identité $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

Ici $A=(5x-1)$ et $B=4$

$M(x)=[(5x-1)+4]\,[(5x-1)-4]$

$M(x)=[5x-1+4]\,[5x-1-4]$

$\boxed{M(x)=(5x+3)(5x-5)}$

**2.** Résoudre les équations suivantes :

Aucune des équations suivantes ne peut être résolue tel quel. Il ne faut pas développer ces expressions car la présence d'un terme en $x^2$ empêche la résolution (Voir la troisième partie).
La bonne idée consiste à factoriser ces expressions puis à utiliser la propriété « du produit nul ».

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)(3x-1)+(5x-3)(2x-1)=0$$

$$(5x-3)\,[(3x-1)+(2x-1)]=0$$

$$(5x-3)(3x-1+2x-1)=0$$

$$(5x-3)(5x-2)=0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$5x-3=0$$
$$5x-3+3=3$$
$$5x=3$$
$$x=\frac{3}{5}=0,6$$

$$5x-2=0$$
$$5x-2+2=2$$
$$5x=2$$
$$x=\frac{2}{5}=0,4$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,6 \text{ et } 0,4}$

$$(4x-3)^2-(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)(4x-3)+(4x-3)(5x-1)=0$$

$$(4x-3)\,[(4x-3)-(5x-1)]=0$$

$$(4x-3)(4x-3-5x+1)=0$$

$$(4x-3)(-x-2)=0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$4x-3=0$$
$$4x-3+3=3$$
$$4x=3$$
$$x=\frac{3}{4}=0,75$$

$$-x-2=0$$
$$-x-2+2=2$$
$$-x=2$$
$$x=-2$$

Il y a deux solutions : $\boxed{0,75 \text{ et } -2}$

$$(3x-2)^2 = 25$$

C'est un cas difficile. Il faut penser à « faire apparaître »un zéro d'un côté de l'égalité puis factoriser l'expression en s'inspirant de l'identité remarquables $a^2 - b^2$

$$(3x-2)^2 - 25 = 25 - 25$$
$$(3x-2)^2 - 25 = 0$$
$$(3x-2)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(3x-2)+5]\,[(3x-2)-5] = 0$$
$$[3x-2+5]\,[3x-2-5] = 0$$
$$(3x+3)(3x-7) = 0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$3x+3 = 0$$
$$3x+3-3 = -3$$
$$3x = -3$$
$$x = \frac{-3}{3} = 1$$

$$3x-7 = 0$$
$$3x-7+7 = 7$$
$$3x = 7$$
$$x = \frac{7}{3} \approx 2,33$$

Il y a deux solutions : $\boxed{1 \text{ et } \frac{7}{3}}$

**Troisième partie** — *Hors catégorie* — ✵✵✵

On veut résoudre l'équation :

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$

Vous pouvez constater qu'on ne sait pas la résoudre directement! On aimerait bien factoriser $x^2 - 14x + 24$.

Vous ne savez pas résoudre une telle équation en troisième. Ces équations avec un terme en $x^2$ s'appelle des équations du second degré. Vous saurez les résoudre directement en première. En attendant, l'exercice propose une version simplifiée de la méthode. Le principe de cette méthode consiste à reconnaître le début d'une identité remarquable du type $(a+b)^2$ ou $(a-)^2$ puis d'effectuer la factorisation de $a^2 - b^2$

**1.** Développer $(x-7)^2$

$(x-7)^2 = \boxed{x^2 - 14x + 49}$
L'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**2.** Montrer que $x^2 - 14x + 24 = (x-7)^2 - 25$

$(x-7)^2 - 25 = x^2 - 14x + 49 - 25$
$\boxed{(x-7)^2 - 25 = x^2 - 14x + 24}$

**3.** Résoudre maintenant l'équation donnée au départ!

$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x-7)^2 - 25 = 0$$

Nous allons utiliser l'identité $a^2 - b^2$ pour factoriser cette expression.

$$(x-7)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x-7)+5]\,[(x-7)-5] = 0$$
$$[x-7+5]\,[x-7-5] = 0$$
$$(x-2)(x-12) = 0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$x-2=0 \qquad x-12=0$$
$$x-2+2=2 \qquad x-12+12=12$$
$$x=2 \qquad x=12$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{2 \text{ et } 12}$

Vérifions : $2^2 - 14\times 2 + 24 = 4 - 28 + 24 = 0$ et $12^2 - 14\times 12 = 144 - 168 + 24 = 0$

Ainsi 2 et 12 sont bien les solutions attendues!

**Défi.** Pouvez-vous résoudre $x^2 + 8x - 9 = 0$ en vous inspirant des trois questions précédentes!

C'est une question très difficile. Nous allons utiliser le plan de la première partie!

Observons l'expression $x^2 + 8x - 9$. On veut que le début de l'expression ressemble à l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Comme $x^2 + 8x = x^2 + 2\times 4x$, on pense à l'identité $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$. C'est assez proche de l'expression cherchée.
L'écart entre les deux expressions est : $(x^2+8x+16) - (x^2+8x-9) = 16+9 = 25$.
Donc finalement $x^2 + 8x - 9 = (x^2+8x+16) - 25 = (x+4)^2 - 25$

Or nous savons factoriser l'expression $(x+4)^2 - 25$ en utilisant l'identité $a^2 - b^2$.
Voici donc la résolution :

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$
$$(x+4)^2 - 25 = 0$$
$$(x+4)^2 - 5^2 = 0$$
$$[(x+4)+5]\,[(x+4)-5] = 0$$
$$[x+4+5]\,[x+4-5] = 0$$
$$(x+9)(x-1) = 0$$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$x+9=0 \qquad x-1=0$$
$$x+9-9=-9 \qquad x-1+1=1$$
$$x=-9 \qquad x=1$$

Il y a donc deux solutions : $\boxed{-9 \text{ et } 1}$

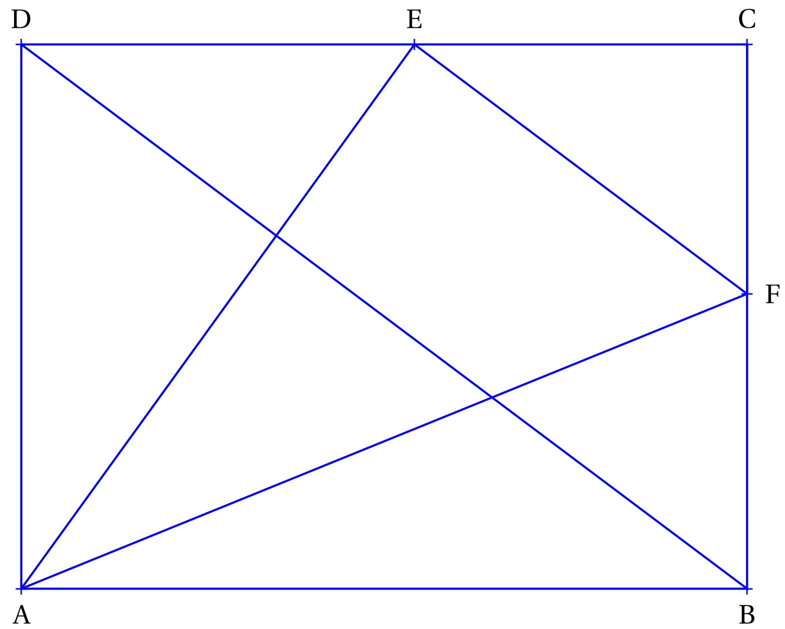
Vérifions : $1^2 + 8\times 1 - 9 = 1 + 8 - 9 = 0$ et $(-9)^2 + 8\times(-9) - 9 = 81 - 72 - 9 = 0$

## THÈME N° 2 : GÉOMÉTRIE

**Première partie** — *Maîtrise satisfaisante* — ✖

ABCD est un rectangle avec AB = 96 $mm$ et AD = 72 $mm$.
E est le point du segment [CD] tel que DE = 52 $mm$.
La parallèle à (BD) passant par E coupe (BC) en F.

**1.** Réaliser la figure en vraies grandeurs.




**2.** Calculer les longueurs BD et AE.

Dans le triangle ABD rectangle en A,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 = \mathrm{BD}^2$$
$$96^2 + 72^2 = \mathrm{BD}^2$$
$$\mathrm{BD}^2 = 9\,216 + 5\,184$$
$$\mathrm{BD}^2 = 14\,400$$
$$\mathrm{BD} = \sqrt{14\,400}$$
$$\mathrm{BD} = 120$$

$\boxed{\mathrm{BD} = 120\ mm}$

Dans le triangle ADE rectangle en D,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$\mathrm{DA}^2 + \mathrm{DE}^2 = \mathrm{AE}^2$$
$$72^2 + 52^2 = \mathrm{AE}^2$$
$$\mathrm{AE}^2 = 5\,184 + 2\,704$$
$$\mathrm{AE}^2 = 7\,888$$
$$\mathrm{AE} = \sqrt{7\,888}$$
$$\mathrm{AE} \approx 88,8$$

$\boxed{\mathrm{AE} = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88,8\ mm \text{ à } 0,1\ mm \text{ près.}}$

**3.** Calculer les longueurs EF et FC.

Dans le triangle DCB, $E \in [DC]$ et $F \in [CB]$
Les droites (DB) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB} = \frac{EF}{DB}$$
$$\frac{96\ mm - 52\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$$
$$\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{CF}{72\ mm}$ alors $CF = \frac{72\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 33\ mm$

Comme $\frac{44\ mm}{96\ mm} = \frac{EF}{120\ mm}$ alors $EF = \frac{120\ mm \times 44\ mm}{96\ mm} = 55\ mm$

Ainsi $\boxed{CF = 33\ mm \text{ et } EF = 55\ mm}$

**4.** Calculer la longueur AF.

Dans le triangle AFB rectangle en B,
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$BA^2 + BF^2 = AF^2$$
$$96^2 + (72 - 33)^2 = AF^2$$
$$AF^2 = 96^2 + 39^2$$
$$AF^2 = 9\,216 + 1\,521$$
$$AF^2 = 10\,737$$
$$AF = \sqrt{10\,737}$$
$$AF \approx 103,6$$

$\boxed{AF = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103,6\ mm \text{ à } 0,1\ mm \text{ près.}}$

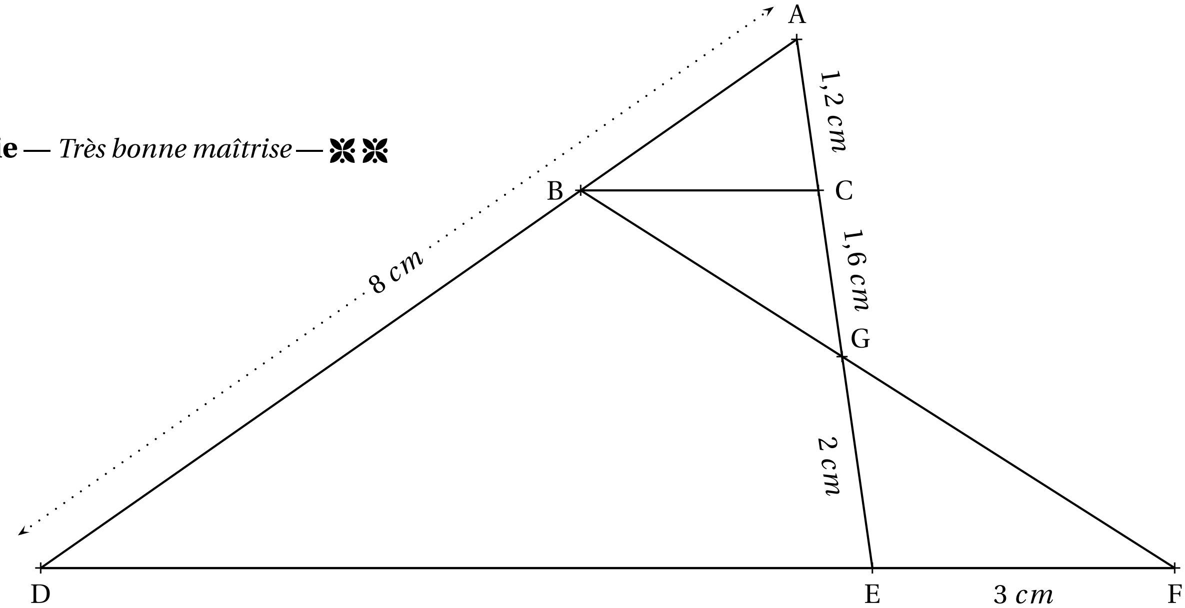
**5.** Le triangle AEF est-il rectangle ?

Dans le triangle AEF nous avons $EF = 55\ mm$, $EA = \sqrt{7\,888}\ mm \approx 88,8\ mm$ et $AF = \sqrt{10\,737}\ mm \approx 103,6\ mm$.
Comparons $AF^2$ et $EF^2 + EA^2$

Pour calculer $AF^2$ on peut passer par la valeur approchée mais il est plus rigoureux d'utiliser la valeur exacte.
En effet $AF^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$ d'après la définition de la racine carrée !

$AF^2 = (\sqrt{10\,737})^2 = 10\,737$
$EF^2 + EA^2 = 55^2 + (\sqrt{7\,888})^2 = 3\,025 + 7\,888 = 10\,913$
On constate ainsi que $EF^2 + EA^2 \neq AF^2$
D'après **la contraposée du théorème de Pythagore** $\boxed{\text{le triangle EAF n'est pas rectangle}}$.

**Seconde partie** — *Très bonne maîtrise* — ❋❋




**1.** Calculer BC.

La difficulté consiste à se demander dans quelle configuration on se place!

Les droites (BF) et (EC) se coupent en G. Les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{GC}{GE} = \frac{GB}{GF} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{1,6\ cm}{2\ cm} = \frac{GB}{GF} = \frac{BC}{3\ cm}$$

Comme $\frac{1,6\ cm}{2\ cm} = \frac{BC}{3\ cm}$ on a $BC = \frac{3\ cm \times 1,6\ cm}{2\ cm} = 2,4\ cm$

$\boxed{BC = 2,4\ cm}$

**2.** Calculer DE et AB.

Dans le triangle ADE, B ∈ [AD] et C ∈ [AE]. Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
D'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{AB}{8\ cm} = \frac{1,2\ cm}{1,6\ cm + 2\ cm} = \frac{2,4\ cm}{DE}$$

$$\frac{AB}{8\ cm} = \frac{1,2\ cm}{3,6\ cm} = \frac{2,4\ cm}{DE}$$

Comme $\frac{AB}{8\ cm} = \frac{1,2\ cm}{3,6\ cm}$ on a $AB = \frac{8\ cm \times 1,2\ cm}{3,6\ cm} = \frac{9,6}{3,6}\ cm \approx 2,7\ cm$

Comme $\frac{2,4\ cm}{DE} = \frac{1,2\ cm}{3,6\ cm}$ on a $DE = \frac{2,4\ cm \times 3,6\ cm}{1,2\ cm} = 7,2\ cm$

$\boxed{AB \approx 2,7\ cm \text{ à } 0,1\ cm \text{ près et } DE = 7,2\ cm}$

**3.** Les droites (BE) et (AF) sont-elles parallèles?

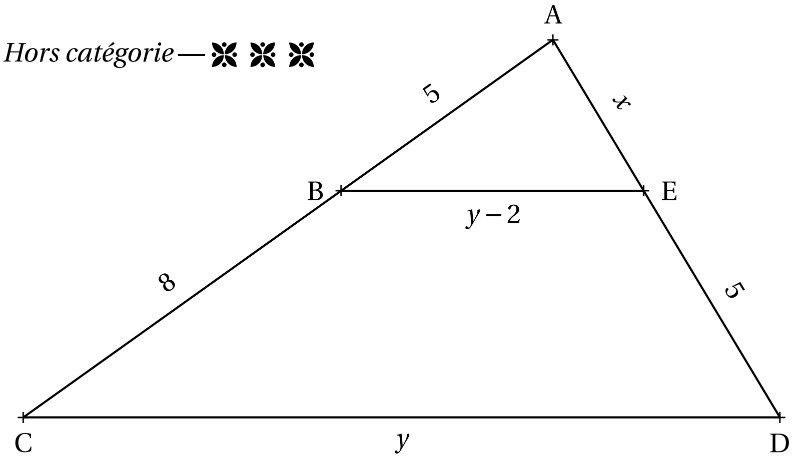
Comme les deux droites (BE) et (AF) coupent les droites (AD) et (DF) sécantes en D,

Nous allons comparer les quotients $\frac{DB}{DA}$ et $\frac{DE}{DF}$

$\frac{DB}{DA} = \frac{8\ cm - 2,7\ cm}{8\ cm} = \frac{5,3\ cm}{8\ cm} \approx 0,66$ et $\frac{DE}{DF} = \frac{7,2\ cm}{7,2\ cm + 3\ cm} = \frac{7,2\ cm}{10,2\ cm} \approx 0,71$

Comme $\frac{DB}{DA} \neq \frac{DE}{DF}$ d'après **la contraposée du théorème de Thalès** $\boxed{\text{les droites (BE) et (AF) ne sont pas parallèles.}}$

**Troisième partie** — *Hors catégorie* — ✱ ✱ ✱




Calculer la valeur exacte de $x$ et de $y$.

Dans le triangle ACD, B ∈ [AC] et E ∈ [AD].
Comme (BE)//(CD), d'après **le théorème de Thalès** on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$$
$$\frac{5}{5+8} = \frac{x}{x+5} = \frac{y-2}{y}$$
$$\frac{5}{13} = \frac{x}{x+5} = \frac{y-2}{y}$$

Nous allons utiliser la propriété des produits en croix pour obtenir des équations que nous savons résoudre.

Comme $\frac{5}{13} = \frac{x}{x+5}$ on en déduit que $5 \times (x+5) = 13 \times x$.
Il faut donc résoudre l'équation :

$$5(x+5) = 13x$$
$$5x + 25 = 13x$$
$$5x + 25 - 5x = 13x - 5x$$
$$25 = 8x$$
$$8x = 25$$
$$x = \frac{25}{8} = 3,125$$

Comme $\frac{5}{13} = \frac{y-2}{y}$ on en déduit que $5 \times y = 13 \times (y-2)$.
Il faut résoudre l'équation :

$$5y = 13(y-2)$$
$$5y = 13y - 26$$
$$5y - 5y = 13y - 26 - 5y$$
$$0 = 8y - 26$$
$$26 = 8y - 26 + 26$$
$$26 = 8y$$
$$8y = 26$$
$$y = \frac{26}{8} = 3,25$$

$\boxed{x = 3,125 \text{ et } y = 3,25}$

## THÈME Nº 3 : VRAI OU FAUX

Voici de nombreuses conjectures. Indiquez si elles sont vraies ou fausses.
Vous trouverez un contre-exemple pour celles qui vous semblent fausses.
Vous tenterez une démonstration ou un calcul pour celles qui vous paraissent vraies.

**Première partie** — *Maîtrise satisfaisante* — ✠

**CONJECTURE Nº 1 :** : $\dfrac{3}{7}-\dfrac{5}{4}$ est un nombre négatif.

$\dfrac{3}{7}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{12}{28}-\dfrac{35}{28}=-\dfrac{23}{28}<0$

$\boxed{\text{Conjecture n° 1 : VRAIE}}$

**CONJECTURE Nº 2 :** : $\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{3}\times\dfrac{3}{7}$ est égal à 0.

Attention à la priorité de la multiplication.
$\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{3}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{5\times3}{3\times7}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{7}=\dfrac{35}{21}-\dfrac{15}{21}=\dfrac{20}{21}$

$\boxed{\text{Conjecture n° 2 : FAUSSE}}$

**CONJECTURE Nº 3 :** : Aucun nombre premier n'est un multiple de 13.

$13=13\times1$ : 13 est un multiple de 13 et 13 est premier.

$\boxed{\text{Conjecture n° 3 : FAUSSE}}$

**CONJECTURE Nº 4 :** : 8 est la solution de l'équation $6x-3=4x+13$.

On peut tester cette proposition de solution :
Pour $x=8$, $6x-3=6\times8-3=48-3=45$ et $4x+13=4\times8+13=32+13=45$
Donc 8 est une solution de l'équation.

On peut aussi résoudre cette équation (ce qui prouvera aussi que 8 est la seule solution !).

$$6x-3=4x+13$$
$$6x-3+3=4x+13+3$$
$$6x=4x+16$$
$$6x-4x=4x-4x+16$$
$$2x=16$$
$$x=\frac{16}{2}$$
$$x=8$$

$\boxed{\text{Conjecture n° 4 : VRAIE}}$

**CONJECTURE Nº 5 :** : Un pavé droit dont les mesures sont 16 $cm$, 11 $cm$ et 6 $cm$ contient un volume supérieur à 1 L.

Le volume de ce pavé droit mesure : $16\ cm\times11\ cm\times6\ cm=1\,056\ cm^3$. On sait que $1\text{ L}=1\ dm^3=1000\ cm^3$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 5 : VRAIE}}$

**Seconde partie** — *Très bonne maîtrise* —

**Conjecture n° 6 :** : Si $n$ est un nombre entier positif alors $2n+1$ est un nombre entier impair.

On peut vérifier sur quelques exemples :
$n = 3$ on a $2n+1 = 2\times 3+1 = 6+1 = 7$ : c'est impair.
$n = 10$ on a $2n+1 = 2\times 10+1 = 20+1 = 21$ : c'est impair.
$n = 2020$ on a $2n+1 = 2\times 2020+1 = 4040+1 = 4041$ : c'est impair !

Un nombre impair est un nombre dont le reste est 1 quand on le divise par 2. Cela signifie par exemple que le successeur d'un nombre pair est un nombre impair.Pour $n$ un nombre entier positif, $2n$ est un nombre pair puisque c'est un multiple de 2. $2n+1$ est le successeur de $2n$, il est donc impair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 6 : VRAIE}}$

**Conjecture n° 7 :** : Si $n$ est un nombre entier positif alors $3n$ est un nombre entier impair.

Pour $n = 2$ on a $3n = 3\times 2 = 6$ : c'est un nombre pair. Plus généralement, $3n$ est pair dès que $n$ est pair.

$\boxed{\text{Conjecture n° 7 : FAUSSE}}$

**Conjecture n° 8 :** : Un cylindre de rayon 5 $cm$ et de hauteur 10 $cm$ contient un volume supérieur à celui d'un cône de 12 $cm$ de rayon et de hauteur 5 $cm$

Le volume d'un cylindre s'exprime sous la forme : Aire de la base × Hauteur $= \pi\times R^2\times h$

Le volume d'un cône s'exprime sous la forme : $\frac{1}{3}\times$ Aire de la base × Hauteur $= \frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times h$

Le cylindre à un volume de : $\pi\times(5\ cm)^2\times 10\ cm = \pi\times 25\times 10\ cm^3 = 250\pi\ cm^3$

Le cône à un volume de : $\frac{1}{3}\times\pi\times(12\ cm)^2\times 5\ cm = \frac{1}{3}\times 144\times 5\pi\ cm3 = 240\pi\ cm^3$

$\boxed{\text{Conjecture n° 8 : VRAIE}}$

**Conjecture n° 9 :** : La somme des carrés de deux nombres est égale au carré de la somme des deux nombres.

La somme des carrés de deux nombres : $3^2+4^2 = 9+16 = 25$
Le carré de la somme de deux nombres : $(3+4)^2 = 7^2 = 49$

Comme $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ l'écart entre $(a+b)^2$ et $a^2+b^2$ est $2ab$.

$\boxed{\text{Conjecture n° 9 : FAUSSE}}$

**Conjecture n° 10 :** : $\frac{5}{3}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $(9x-15)(15x+35) = 0$

Il faut résoudre l'équation : $(9x-15)(15x+35) = 0$

**Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.**

$$9x-15 = 0$$
$$9x-15+15 = 15$$
$$9x = 15$$
$$x = \frac{15}{9}$$
$$x = \frac{5}{3}$$

$$15x+35 = 0$$
$$15x+35-35 = -35$$
$$15x = -35$$
$$x = -\frac{35}{15}$$
$$x = -\frac{7}{3}$$

$\boxed{\text{Conjecture n° 10 : VRAIE}}$

**Troisième partie** — *Hors catégorie* — ✵✵✵

**CONJECTURE N° 11 :** : La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$4+5=9$ : impair.
$10+17=27$ : impair.

Un nombre pair quelconque peut s'écrire $2n$ où $n$ est un entier.
Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où $p$ est un entier.
Effectuons la somme de $2n$ et $2p+1$ : $2n+2p+1=2(n+p)+1$ : on a factorisé 2.
Donc la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair quelconques peut s'écrire $2k+1$ où $k=n+p$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

Conjecture n° 11 : VRAIE

**CONJECTURE N° 12 :** : La somme de deux nombres entiers impairs est un nombre entier pair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7+5=12$ : pair.
$11+17=28$ : pair.

Un premier nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où $n$ est un entier.
Un second nombre impair quelconque peut s'écrire $2p+1$ où $p$ est un entier.
Effectuons la somme de $2n+1$ et $2p+1$ : $2n+1+2p+1=2n+2p+2=2(n+p+1)$ : on a factorisé 2.
Donc la somme de deux nombres impairs quelconques peut s'écrire $2k$ où $k=n+p+1$.
C'est l'écriture d'un nombre pair !

Conjecture n° 12 : VRAIE

**CONJECTURE N° 13 :** : Le carré d'un nombre entier impair est un nombre entier impair.

Vérifions sur quelques exemples :
$7^2=49$ : impair.
$11^2=121$ : impair.

Un nombre impair quelconque peut s'écrire $2n+1$ où $n$ est un entier.
Le carré d'un nombre impair peut donc s'écrire $(2n+1)^2$
$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$ : on a factorisé 2.
Donc le carré d'un nombre impair quelconque peut s'écrire $2k+1$ où $k=2n^2+2n$.
C'est l'écriture d'un nombre impair !

Conjecture n° 13 : VRAIE

**CONJECTURE N° 14 :** : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif inférieur à 999 ;
- Le multiplier par 13 ;
- Enlever 5 au résultat précédent ;
- Multiplier le tout par 11 ;
- Ajouter 49 au résultat précédent ;
- Multiplier par 7 ;
- Ajouter 42 au résultat précédent.

Que constatez-vous ? Pouvez-vous démontrer votre résultat.

Testons avec quelques nombres :

Avec 67 : $13 \times 67 = 871$, $871 - 5 = 866$ puis $11 \times 866 = 9\,526$, $9\,526 + 49 = 9\,575$
Et enfin $7 \times 9\,575 = 67\,025$ puis $67\,025 + 42 = 67\,067$

Avec 567 : $13 \times 567 = 7\,371$, $7\,371 - 5 = 7\,366$ puis $11 \times 7\,366 = 81\,026$, $81\,026 + 49 = 81\,075$
Et enfin $7 \times 81\,075 = 567\,525$ puis $567\,525 + 42 = 567\,567$

Le nombre de départ semble répété deux fois dans le nombre résultat.

Notons $x$ le nombre entier choisi au départ.
On le multiplie par 13 : $13x$
On enlève 5 : $13x - 5$
On multiplie le tout par 11 : $11(13x - 5) = 143x - 55$
On ajoute 49 : $143x - 55 + 49 = 143x - 6$
On multiplie par 7 : $7(143x - 6) = 1\,001x - 42$
On ajoute 42 : $1\,001x - 42 + 42 = 1\,001x$

Ainsi ce programme de calcul revient à multiplier le nombre de départ par 1 001.
En multipliant un nombre par 1 001 on obtient bien l'effet attendu !

**CONJECTURE N° 15 :** : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100$ est égal à 5 050

C'est une question célèbre ! On raconte qu'elle a été posée vers 1784 par un instituteur à une classe d'élèves de 7 ans qu'il voulait punir en leur donnant cette très longue addition. Dans cette classe cependant se trouvait celui qui allait devenir le plus grand mathématicien du XIX [e]siècle : Carl Friedrich Gauss. Celui-ci au bout de quelques secondes leva son ardoise avec le bon résultat ! Voici comment il s'y est pris ! Vous attendrez d'être en première pour découvrir les suites arithmétiques et une formule générale qui résoud ce problème

L'idée géniale est d'écrire cette somme dans un sens puis dans l'autre sens :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & ... & + & 97 & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & ... & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline S+S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Au lieu d'ajouter horizontalement il faut penser à ajouter verticalement.
On obtient le double de la somme et 100 fois le nombre 101.
Ainsi le double de la somme est égale à $100 \times 101 = 10\,100$

La somme S cherchée vaut donc $10\,100 \div 2 = 5\,050$

$\boxed{\text{Conjecture n° 15 : VRAIE}}$