
I — Définition et exemples

📌 DÉFINITION 8.1 :

a et b deux nombres quelconques.

La **fonction affine** de paramètres a et b est la fonction défini ainsi :

$$f : x \rightarrow f(x) = ax + b$$

EXEMPLES :

$f(x) = 3x + 5$ est la fonction affine de paramètres $a = 3$ et $b = 5$

$g(x) = -3x - 7$ est la fonction affine de paramètres $a = -3$ et $b = -7$

$h(x) = \frac{2x}{3} - \frac{9}{5}$ est la fonction affine de paramètres $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{9}{5}$

$k(x) = x - 3$ est la fonction affine de paramètres $a = 1$ et $b = -3$

$l(x) = 7 - x$ peut s'écrire $l(x) = -x + 7$, elle est affine de paramètres $a = -1$ et $b = 7$

\mathbf{Z} $m(x) = 5x$ peut s'écrire $m(x) = 5x + 0$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = 0$

$n(x) = 3$ peut s'écrire $n(x) = 0x + 3$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 0$ et $b = 3$.

n est une fonction **constante**.

📌 PROPRIÉTÉ 8.1 :

a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est une **fonction affine** de paramètres a et $b = 0$.

📌 DÉMONSTRATION :

a un nombre quelconque.

La fonctions $x \rightarrow ax$ peut s'écrire $x \rightarrow ax + b$ avec $b = 0$.

Il s'agit bien d'une fonction affine!

CQFD

MÉTHODE 8.1 : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Un cas simple :

f un fonction affine telle que $f(0) = 5$ et $f(2) = -1$.

On cherche l'expression algébrique de la fonction f c'est à dire les nombres a et b tel que pour tout nombre x , $f(x) = ax + b$.

Comme $f(0) = 5$ on arrive à $f(0) = a \times 0 + b = b$ c'est à dire $b = 5$.

Quand on connaît l'image de 0 par une fonction affine on obtient ainsi le paramètre b .

Ainsi $f(x) = ax + 5$ or on sait que $f(2) = -1$, il suffit donc de remplacer x par 2.

On obtient $f(2) = a \times 2 + 5 = 2a + 5$.

Il faut ensuite résoudre l'équation dont l'inconnue est a :

$$\begin{aligned}f(2) &= -1 \\2a + 5 &= -1 \\2a + 5 - 5 &= -1 - 5 \\2a &= -6 \\a &= \frac{-6}{2} \\a &= -3\end{aligned}$$

La fonction affine cherchée est donc $f(x) = -3x + 5$.

On peut vérifier en calculant les images de 0 et 2 : $f(0) = -3 \times 0 + 5 = 5$ et $f(2) = -3 \times 2 + 5 = -6 + 5 = -1$.

Le cas général

g la fonction affine telle que $g(2) = 8$ et $g(5) = 17$.

Déterminons l'expression algébrique de cette fonction.

On cherche donc deux nombres a et b tel que $g(x) = ax + b$

En remplaçant x par 2 puis par 5 on obtient deux équations dont a et b sont les inconnues :

$$\begin{aligned}(1) \quad a \times 2 + b &= 8 & \text{et} & & (2) \quad a \times 5 + b &= 17 \\(1) \quad 2a + b &= 8 & \text{et} & & (2) \quad 5a + b &= 17\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (1) on obtient :

$$\begin{aligned}2a + b &= 8 \\2a - 2a + b &= 8 - 2a \\b &= 8 - 2a\end{aligned}$$

Donc l'inconnue b peut s'exprimer en fonction de l'inconnue a : $b = 8 - 2a$

En prenant maintenant l'équation (2) $5a + b = 17$ on peut remplacer b par l'expression $8 - 2a$:

$$\begin{aligned}5a + b &= 17 \\5a + (8 - 2a) &= 17 \\5a + 8 - 2a &= 17 \\3a + 8 &= 17 \\3a + 8 - 8 &= 17 - 8 \\3a &= 9 \\a &= \frac{9}{3}\end{aligned}$$