I — Définition et exemples

DÉFINITION 8.1 :

a et b deux nombres quelconques.

La **fonction affine** de paramètres a et b est la fonction défini ainsi :

$$f : x \rightarrow f(x) = ax + b$$

EXEMPLES :

$f(x) = 3x + 5$ est la fonction affine de paramètres $a = 3$ et $b = 5$
$g(x) = -3x - 7$ est la fonction affine de paramètres $a = -3$ et $b = -7$

$h(x) = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{9}{5}$ est la fonction affine de paramètres $a = \dfrac{2}{3}$ et $b = -\dfrac{9}{5}$

$k(x) = x - 3$ est la fonction affine de paramètres $a = 1$ et $b = -3$
$l(x) = 7 - x$ peut s'écrire $l(x) = -x + 7$, elle est affine de paramètres $a = -1$ et $b = 7$

$m(x) = 5x$ peut s'écrire $m(x) = 5x + 0$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = 0$
$n(x) = 3$ peut s'écrire $n(x) = 0x + 3$ c'est une fonction affine de paramètres $a = 0$ et $b = 3$.
n est une fonction **constante**.

PROPRIÉTÉ 8.1 :

a un nombre quelconque.

La **fonction linéaire** de coefficient a est une **fonction affine** de paramètres a et $b = 0$.

DÉMONSTRATION :

a un nombre quelconque.
La fonctions $x \rightarrow ax$ peut s'écrire $x \rightarrow ax + b$ avec $b = 0$.
Il s'agit bien d'une fonction affine !

CQFD

MÉTHODE 8 . 1 : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Un cas simple :

f un fonction affine telle que $f(0) = 5$ et $f(2) = -1$.

On cherche l'expression algébrique de la fonction f c'est à dire les nombres a et b tel que pour tout nombre x, $f(x) = ax + b$.

Comme $f(0) = 5$ on arrive à $f(0) = a \times 0 + b = b$ c'est à dire $b = 5$.
Quand on connaît l'image de 0 par une fonction affine on obtient ainsi le paramètre b.

Ainsi $f(x) = ax + 5$ or on sait que $f(2) = -1$, il suffit donc de remplacer x par 2.
On obtient $f(2) = a \times 2 + 5 = 2a + 5$.
Il faut ensuite résoudre l'équation dont l'inconnue est a :

$$f(2) = -1$$
$$2a + 5 = -1$$
$$2a + 5 - 5 = -1 - 5$$
$$2a = -6$$
$$a = \frac{-6}{2}$$
$$a = -3$$

La fonction affine cherchée est donc $\boxed{f(x) = -3x + 5}$.

On peut vérifier en calculant les images de 0 et 2 : $f(0) = -3 \times 0 + 5 = 5$ et $f(2) = -3 \times 2 + 5 = -6 + 5 = -1$.

Le cas général

g la fonction affine telle que $g(2) = 8$ et $g(5) = 17$.
Déterminons l'expression algébrique de cette fonction.

On cherche donc deux nombres a et b tel que $g(x) = ax + b$
En remplaçant x par 2 puis par 5 on obtient deux équations dont a et b sont les inconnues :

$$(1)\ a \times 2 + b = 8 \quad et \quad (2)\ a \times 5 + b = 17$$
$$(1)\ 2a + b = 8 \quad et \quad (2)\ 5a + b = 17$$

En utilisant l'équation (1) on obtient :

$$2a + b = 8$$
$$2a - 2a + b = 8 - 2a$$
$$b = 8 - 2a$$

Donc l'inconnue b peut s'exprimer en fonction de l'inconnue a : $b = 8 - 2a$

En prenant maintenant l'équation (2) $5a + b = 17$ on peut remplacer b par l'expression $8 - 2a$:

$$5a + b = 17$$
$$5a + (8 - 2a) = 17$$
$$5a + 8 - 2a = 17$$
$$3a + 8 = 17$$
$$3a + 8 - 8 = 17 - 8$$
$$3a = 9$$
$$a = \frac{9}{3}$$