Chapitre IX

La trigonométrie

Tous le reste

Plan du cours :

a

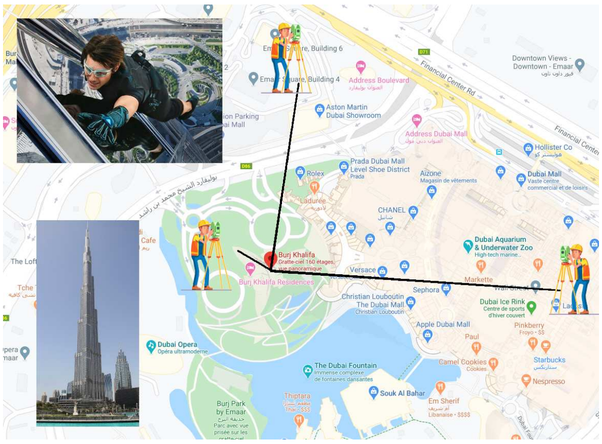
Programme (*BO n°30 du 26-7-2018*) **:**

— a

Compétences :

— a

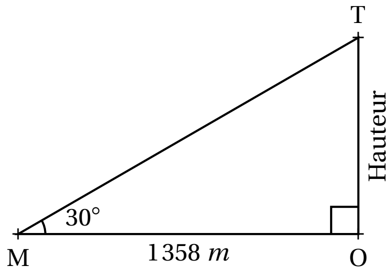
SITUATION INITIALE : Mission impossible : mais à quelle hauteur se trouve Tom Cruise ?



La tour **Burj Khalifa** de Dubaï est la plus haute du monde depuis 2010, elle mesure 828 m. On se souvient de Tom Cruise en 2011 dans Mission Impossible – Protocole fantôme, qui escaladait cette fameuse tour.

Dans cette activité nous allons imaginer nous balader dans Dubaï avec un théodolite (un appareil de géomètre qui permet de mesurer les angles) en plein tournage de Mission Impossible.

Je souhaite mesurer la hauteur à laquelle se trouve Tom Cruise en utilisant la distance horizontale qui nous sépare de la tour et l'angle d'observation de l'acteur.



Première partie

En me positionnant à 1 358 m du pied de la tour (j'utilise un GPS), je constate que l'angle d'observation de l'acteur sur la tour par rapport à l'horizontale est exactement de 30°. Je me demande comment en déduire sa hauteur.
Pour cela j'ai l'idée de tracer cette figure à l'échelle.
Je décide que 100 m dans la réalité seront représentés par 1 cm sur le dessin.

1. Exprimez cette échelle sous la forme habituelle, c'est à dire un ratio 1 : n puis une fraction $\dfrac{1}{n}$

2. Tracez cette figure à cette échelle puis mesurez la longueur OT.

3. En déduire une valeur approchée au mètre près de la hauteur où se trouve Tom Cruise.

4. Donnez une valeur approchée au millième près du quotient $\zeta = \dfrac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OM}}$ en mesurant votre figure à l'échelle.

(ζ est une lettre de l'alphabet grec qui se prononce zéta, elle a donné notre z… cela ne rend pas cette question plus difficile !)

5. Expliquez pourquoi la hauteur de la tour est donnée par l'expression suivante :

$$\text{Hauteur de la tour} = \zeta \times \text{Distance horizontale}$$

Seconde partie

Je me déplace maintenant dans Dubaï jusqu'à me retrouver avec un angle de vision d'exactement 40° avec Tom Cruise.

1. Me suis-je rapproché ou éloigné de la tour ?

2. Je suis en fait à 934 m de la tour. Reprenez les questions **2.** et **3.** de la première partie avec la même échelle pour déterminez à nouveau la hauteur.

3. Donnez une valeur approchée au millième près du quotient $\zeta = \dfrac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OM}}$ en mesurant votre figure à l'échelle.

4. Tracez un triangle MOT rectangle en O représentant la même situation en prenant $\widehat{\mathrm{OMT}} = 40°$ et la mesure de votre choix pour la distance MO.

5. Calculez à nouveau ζ au millième près en mesurant cette figure. Que constatez-vous ?
À quelle grandeur de cette figure est lié le quotient ζ ?

Troisième partie

Je me rapproche très près de la tour, l'angle de visée est alors exactement de 80°.

1. En traçant un triangle rectangle ayant un angle aigu de 80°, déterminez une valeur approchée au milième près du quotient ζ en vous inspirant de la méthode de la seconde partie questions **4.** et **5.**.

2. Je constate que je suis exactement à 138 m du pied de la tour.
Calculez à nouveau la hauteur à laquelle se trouve l'acteur et vérifiez que vous obtenez bien le même résultat.

I — Vocabulaire du triangle rectangle

Propriété 9.1 : Hypoténuse d'un triangle rectangle

Si un triangle est rectangle alors son côté le plus long est opposé à l'angle droit.
Le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle s'appelle l' **hypoténuse** .

Démonstration :

À rédiger

CQFD

Propriété 9.2 : Les angles dans un triangle rectangle

Si un triangle ABC est rectangle en A alors :

— $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont deux angles aigus;
— $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont **complémentaires** .

Remarques :

On dit que deux angles sont **complémentaires** si leur somme est égale à une angle droit, c'est à dire si la somme de leurs mesures est égale à 90°.

On dit que deux angles sont **supplémentaires** si leur somme est égale à un angle plat, c'est à dire si la somme de leurs mesures est égale à 180°.

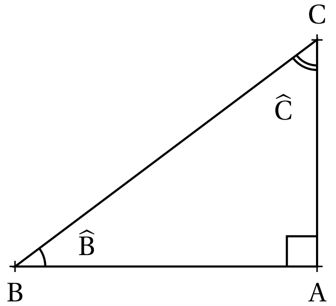
Démonstration :

À rédiger

CQFD

Définition 9.1 : Vocabulaire dans la triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A.



— [BC] est l'hypoténuse;
— [AC] et [AB] sont les côtés de l'angle droit;
— [AC] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{C}$;
— [AB] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{C}$;
— [AB] est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$;
— [AC] est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.

REMARQUES :
Le côté adjacent à un angle aigu est le côté opposé de l'angle complémentaire.
Le côté opposé à un angle aigu est le côté adjacent de l'angle complémentaire.
Le mot « adjacent »vient du latin *adjacens*, participe présent de *adjacere* qui signifie « être situé auprès ». Il a pour synonyme contigu, voisin ou attenant.
Un **côté adjacent** à un angle est un segment dont l'une des extrémités est le sommet de l'angle.
Un **côté opposé** à un angle est un segment dont aucune des extrémités est le sommet de l'angle.

II — Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

PROPRIÉTÉ 9.3 : Triangles rectangles semblables *(Admise)*

Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils sont semblables.
Si deux triangles rectangles ont un angle aigu ayant la même mesure alors ils ont des côtés proportionnels.

DÉMONSTRATION :

Considérons deux triangles rectangles ABC et $A'B'C'$ rectangle respectivement en A et A' et tel que $\widehat{B} = \widehat{B'}$.
Comme la somme des angles dans un triangles est égal à 180°, les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ sont égaux.
Ainsi les trois angles de ces triangles sont égaux. D'après la propriété 3.2, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.
Les côtés de ces deux triangles sont donc proportionnels.

CQFD

REMARQUE :
Considérons deux triangles ABC et $A'B'C'$ rectangles respectivement en A et A' semblables.
Il existe donc un nombre positif non nul k tel que $A'B' = k \times AB$, $A'C' = k \times AC$ et $B'C' = k \times BC$.

Le quotient $\dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{k \times AB}{k \times BC} = \dfrac{AB}{BC}$

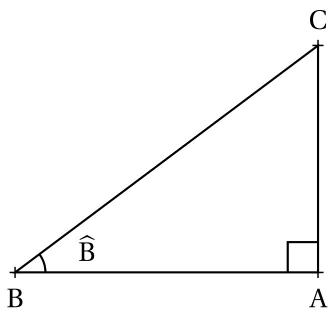
Le quotient $\dfrac{A'C'}{B'C'} = \dfrac{k \times AC}{k \times BC} = \dfrac{AC}{BC}$

Le quotient $\dfrac{A'C'}{A'B'} = \dfrac{k \times AC}{k \times AB} = \dfrac{AC}{AB}$

Ces trois quotients ne dépendent donc pas des mesures des triangles rectangles ABC et $A'B'C'$. Ils ne dépendent donc que d'un des angles aigus de ces triangles, par exemple $\widehat{B}$.
Cela justifie la définition suivante :

❧ DÉFINITION 9.2 : Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

ABC est un triangle rectangle en A.



On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{B}$ de la manière suivante :

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}$$

MOYEN MNÉMOTECHNIQUE :

Ces trois expressions doivent être connues par coeur !
Voici un moyen pour les mémoriser, il suffit de retenir le mot suivant :

COSINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ TANGENTE ADJACENT

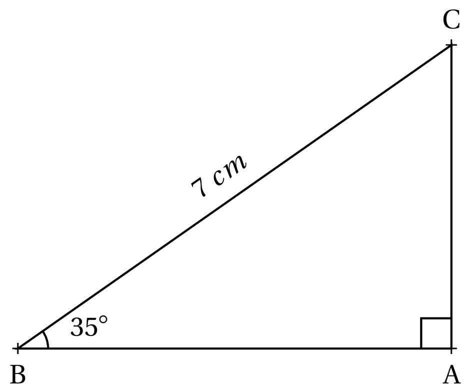
C A H S O H T O A

ADJACENT SINUS HYPOTÉNUSE OPPOSÉ

REMARQUES :
Pour une mesure d'angle aigu donnée, par exemple 75°, cos(75°), sin(75°) et tan(75°) sont des nombres. Ces nombres sont connus, la plupart ne sont pas décimaux mais la calculatrice est capable d'en donner une valeur approchée.
Par exemple $\cos(75°) \approx 0{,}2588190451$ à 10^{-10} près.
Dans les exercices, les cosinus, sinus ou tangente d'un angle aigu doivent être considérés comme des nombres au même titre que π, $\sqrt{2}$, 0,5 ou 2.

III — Usage de la trigonométrie

MÉTHODE 9 . 1 : Calculer la mesure d'un côté connaissant un angle aigu et l'hypoténuse



On souhaite calculer la mesure exacte des côtés [AB] et [AC].

Calculons AB**.**

Analyse : [BC] est l'hypoténuse du triangle ABC et [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$.
On connaît l'**hypoténuse** du triangle et on cherche la mesure du **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seul le **cosinus** se calcule en utilisant la mesure de l'hypoténuse et du côté adjacent.

Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\cos(35°) = \dfrac{AB}{BC}$ donc $\cos(35°) = \dfrac{AB}{7\ cm}$.

Ainsi $\boxed{AB = 7\ cm \times \cos(35°) \approx 5,73\ cm \text{ à } 0,01\ cm \text{ près.}}$

Remarque : Dans l'expression $\cos(35°) = \dfrac{AB}{7\ cm}$ seule la grandeur AB est inconnue.

Pour exprimer AB on a utilisé la **règle de trois**.

Il suffit pour cela d'écrire $\cos(35°)$ sous la forme d'une fraction $\dfrac{\cos(35°)}{1}$

On a ainsi $\dfrac{\cos(35°)}{1} = \dfrac{AB}{7\ cm}$ d'où en utilisant la **règle de trois** : $AB = 7\ cm \times \cos(35°) \div 1$ soit $AB = 7\ cm \times \cos(35°)$

L'expression $7\ cm \cos(35°)$ est la valeur exacte de la mesure du côté [AB].

Calculons AC.

Analyse : On connaît l'**hypoténuse** du triangle et on cherche la mesure du **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seul le **sinus** se calcule en utilisant la mesure de l'hypoténuse et du côté opposé.

Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\sin(35°) = \dfrac{AB}{BC}$ donc $\sin(35°) = \dfrac{AC}{7\ cm}$.

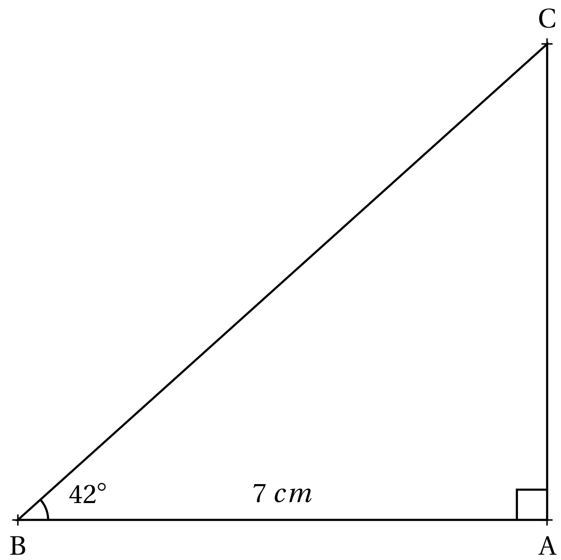
Ainsi $\boxed{AC = 7\ cm \times \sin(35°) \approx 4{,}01\ cm \text{ à } 0{,}01\ cm \text{ près.}}$

USAGE DE LA CALCULATRICE :
Les nombres $\cos(35°)$ et $\sin(35°)$ sont disponibles avec la calculatrice.
Les touches cos sin et tan permettent d'obtenir le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle.
Pour calculer $\cos(60°)$ il suffit de saisir cos 60. Le symbole ∘ n'est pas nécessaire !

Il faut vérifier que la calculatrice est configurée pour traiter les angles en degrés !

Un bon test consiste à calculer $\cos(60°) = 0{,}5$. Si la calculatrice ne donne pas cette valeur, c'est qu'elle est mal configurée. Il faut modifier l'unité des angles, en général avec la touche Config ou Setup ou encore Mode ...

MÉTHODE 9 . 2 : Calculer la mesure d'un côté connaissant un angle aigu et un côté de l'angle droit



On souhaite calculer les mesures des côtés [BC] et [AC]

Calcul de BC**.**

Analyse : [BC] est l'hypoténuse du triangle ABC et [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$.
On connaît l'**hypoténuse** du triangle et on cherche la mesure du **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seul le **cosinus** se calcule en utilisant la mesure de l'hypoténuse et du côté adjacent.

Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\cos(42°) = \dfrac{AB}{BC}$ donc $\cos(42°) = \dfrac{7\ cm}{BC}$.

Ainsi $\boxed{BC = \dfrac{7\ cm}{\cos(42°)} \approx 9{,}42\ cm \text{ à } 0{,}01\ cm \text{ près.}}$

Remarque : Pour exprimer BC on a utilisé la **règle de trois**.

Il suffit pour cela d'écrire $\cos(42°)$ sous la forme d'une fraction $\dfrac{\cos(42°)}{1}$

On a ainsi $\dfrac{\cos(42°)}{1} = \dfrac{7\ cm}{BC}$ d'où en utilisant la **règle de trois** : $BC = 7\ cm \times 1 \div \cos(42°)$ soit $BC = \dfrac{7\ cm}{\cos(42°)}$

L'expression $\dfrac{7\ cm}{\cos(42°)}$ est la valeur exacte de la mesure du côté [AB].

Calculons AC.

Analyse : On connaît le **côté adjacent** du triangle et on cherche la mesure du **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.
Parmi les trois grandeurs trigonométriques, seule la **tangente** se calcule en utilisant la mesure du côté opposé et du côté adjacent.

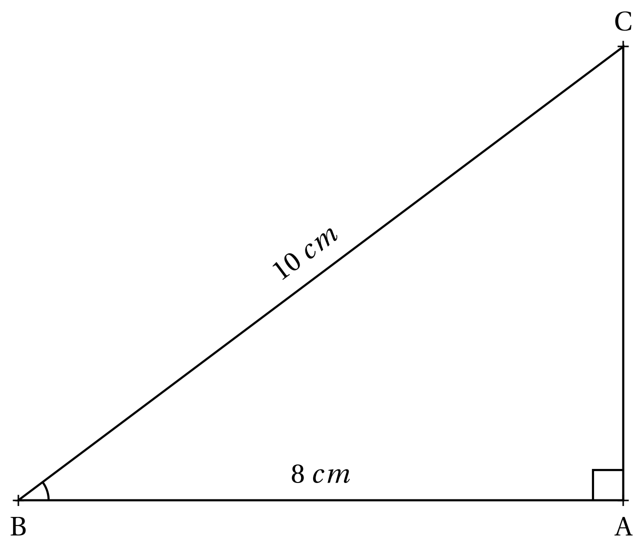
Rédaction : Dans le triangle ABC rectangle en A.

$\tan(42°) = \dfrac{AC}{AB}$ donc $\tan(42°) = \dfrac{AC}{7\ cm}$.

Ainsi $\boxed{AC = 7\ cm \times \tan(42°) \approx 6,30\ cm \text{ à } 0,01\ cm \text{ près.}}$

Nous venons de voir que la connaissance de la mesure d'un angle aigu permettait d'obtenir à la calculatrice les nombres sans unités cosinus, sinus ou tangente de cet angle.
Nous allons maintenant remarquer que la connaissance de l'un de ces nombres, cosinus, sinus ou tangente, permet de retrouver la mesure de l'angle.

MÉTHODE 9 . 3 : Calculer la mesure d'un angle connaissant la mesure de deux côtés



Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$

Dans le triangle ABC rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse du triangle et [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$.
Nous pouvons donc calculer le cosinus de cet angle.

$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{8\ cm}{10\ cm} = 0,8$

À la calculatrice on trouve $\widehat{ABC} \approx 36,87°$ à $0,01°$ près.

On peut obtenir l'angle $\widehat{ACB}$ en utilisant le fait qu'il est complémentaire avec $\widehat{ABC}$.
On a $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{ABC} \approx 53,13°$ à $0,01°$ près.

Vérifions avec la trigonométrie.
Dans le triangle ABC rectangle en A, [BC] est l'hypoténuse du triangle et [AB] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$.
Nous pouvons donc calculer le sinus de cet angle.

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{8\ cm}{10\ cm} = 0,8$$

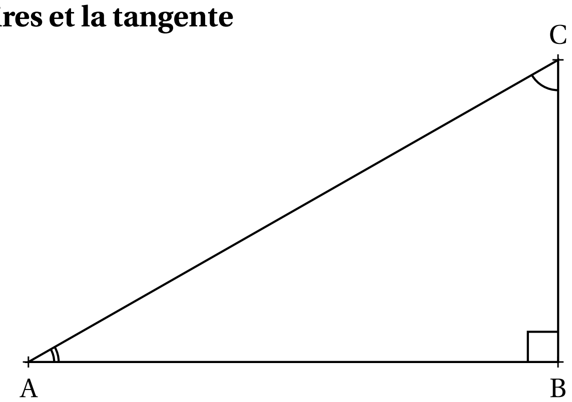
À la calculatrice on trouve $\widehat{ACB} \approx 53,13°$ à $0,01°$ près.

USAGE DE LA CALCULATRICE :
Quand on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu, la calculatrice donne la mesure de l'angle en utilisant les séquences suivante Seconde Cos ou Seconde Sin ou enfin Seconde Tan .
Dans ce cas la calculatrice affiche *Arccos()*, *Arcsin()* ou *Arctan()* (ou encore cos^{-1} sin^{-1} ou tan^{-1})...

IV — Quelques propriétés trigonométriques

Cette section est une extension du programme de troisième.

1 Les angles complémentaires et la tangente



Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$ sont **complémentaires** . Cela signifie que leur somme vaut 90°.
Dans le triangle ABC rectangle en B, on constate que le côté [AB] est adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$ et opposé à l'angle $\widehat{BCA}$.
De même le côté [BC] est adjacent à l'angle $\widehat{BCA}$ et opposé à l'angle $\widehat{BAC}$.

Ainsi nous avons :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} \qquad \sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} \qquad \tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos \widehat{BCA} = \frac{BC}{AC} \qquad \sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} \qquad \tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$$

De plus $\dfrac{\sin \widehat{BAC}}{cos \widehat{BAC}} = \dfrac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{BC}{AC} \times \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC \times AC}{AC \times AB} = \dfrac{BC}{AB} = \tan \widehat{BAC}$

Propriété 9.4 : Trigonométrie et angles complémentaires

Dans un triangle rectangle les deux angles aigus $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont complémentaires.
Nous avons de plus les relations suivantes :

$$\cos\widehat{a} = \sin\widehat{b} \qquad \sin\widehat{a} = \cos\widehat{b} \qquad \tan\widehat{a} = \frac{1}{\tan\widehat{b}}$$

Nous avons aussi :

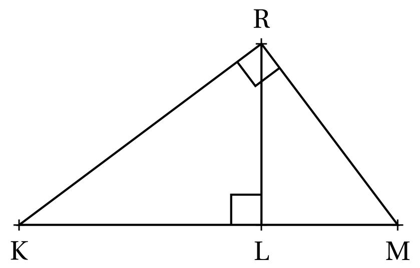
$$\tan\widehat{a} = \frac{\sin\widehat{a}}{\cos\widehat{a}}$$

2 Quelques angles particuliers

3 La relation fondamentale

4 Trigonométrie et cercle de rayon unité

EXERCICE N° 9.1 : Vocabulaire



1. Recopier et compléter les phrases suivantes avec les mots : **adjacent, opposé ou hypoténuse**

Dans le triangle KRM rectangle en R :

— [RK] est le côté .... à l'angle $\widehat{RKM}$

— [RM] est le côté .... à l'angle $\widehat{RKM}$

— [RK] est le côté .... à l'angle $\widehat{RMK}$

— [RM] est le côté .... à l'angle $\widehat{RMK}$

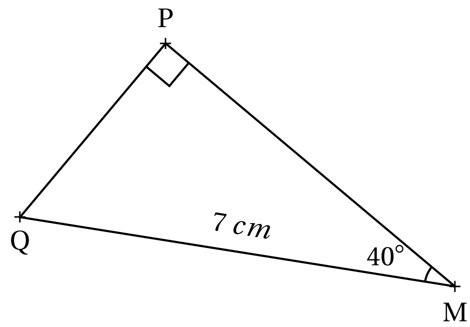
— [MK] est ....

2. Recommencer la question **1.** avec le triangle RLK puis RLM en faisant pour chacun 5 phrases du même type.

3. Citer tous les couples d'angles complémentaires de cette figure. En déduire tous les angles égaux de cette figure ?

4. Que peut-on dire des triangles KRM, KRL et RLM ?

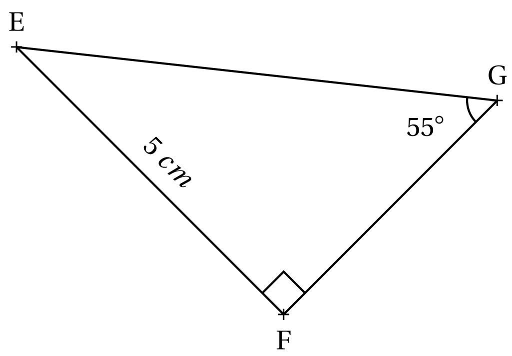
EXERCICE N° 9.2 : Calcul de deux côtés — Épisode 1



Le triangle QPM est rectangle en P.
On sait que $\widehat{PMQ} = 40°$ et que $QM = 7\ cm$

Calculer les valeurs exactes de PQ et PM.
Donner une valeur approchée au mm près.

EXERCICE N° 9.3 : Calcul de deux côtés — Épisode 2



Le triangle EFG est rectangle en F.
On sait que $\widehat{FGE} = 40°$ et que $FE = 5\ cm$

Calculer les valeurs exactes de FG et GE.
Donner une valeur approchée au mm près.

EXERCICE N° 9.4 : L'angle à 30°

1. Tracer une triangle ABC rectangle en B tel que :

— $AC = 10\ cm$

— $\widehat{BAC} = 30°$

2. Calculer en justifiant votre réponse une valeur approchée au millimètre près des mesures AC et AB

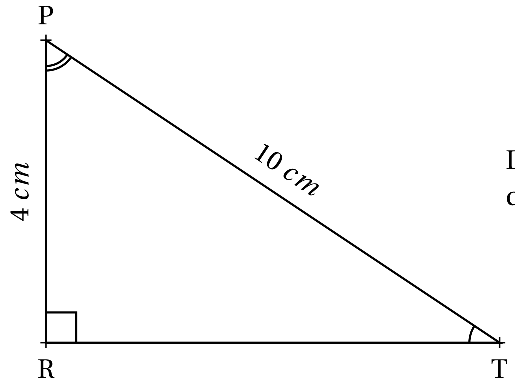
3. Que remarquez-vous pour le côté [BC] ?

4. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$?

5. En utilisant votre calculatrice calculer $\cos(30°)$, $\sin(30°)$, $\cos(60°)$ et $\sin(60°)$.

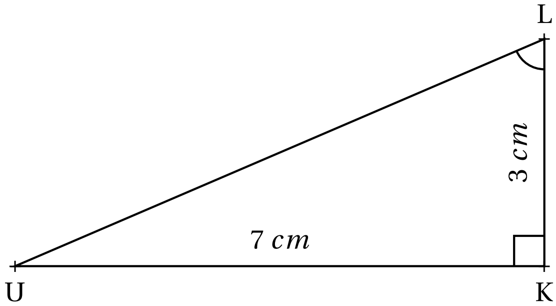
Que remarquez-vous ? Comment pouvez-vous expliquer cela ?

Exercice n° 9.5 : Calcul d'un angle — Épisode 1



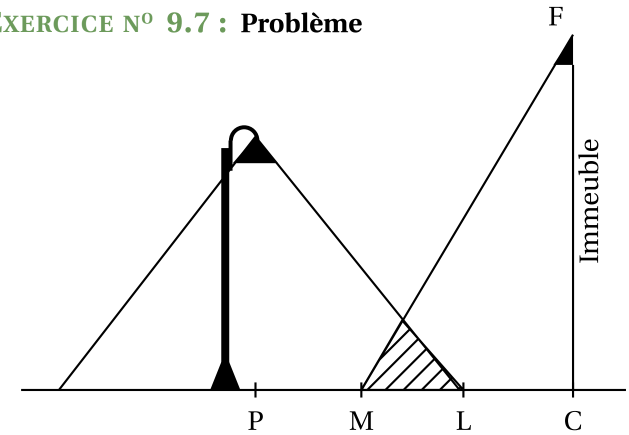
Donner une valeur approchée au centième de degré près des angles $\widehat{RPT}$ et $\widehat{RTP}$

Exercice n° 9.6 : Calcul d'un angle — Épisode 2

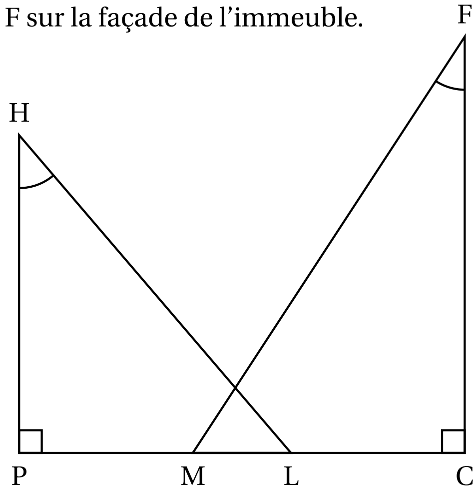


Donner une valeur approchée au centième de degré près des angles $\widehat{KUL}$ et $\widehat{KLU}$

Exercice n° 9.7 : Problème



On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



On réalise le croquis ci-contre qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :
On dispose des données suivantes :

PC $= 5{,}5\ m$, CF $= 5\ m$ et HP $= 4\ m$

$\widehat{MFC} = 33°$ et $\widehat{PHL} = 40°$

1. Justifier que l'arrondi au décimètre de la longueur PL est égal à $3{,}4\ m$.

2. Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière. On arrondira la réponse au décimètre.

3. On effectue des réglages du spot situé en F afin que M et L soient confondus (exactement au même endroit !). Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

Le cercle trigonométrique